КОНКУРЕНЦИЯ ПО КУРНО: РАВНОВЕСНЫЕ СТРАТЕГИИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗАТРАТ И ПРИ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ ПРОДУКЦИИ

Шведов А.С.
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Москва, Россия
ashvedov@hse.ru

Аннотация. Рассматривается некооперативная игра из теории олигополии, когда фирмы используют в качестве стратегий объемы выпуска. Информация о средних предельных затратах каждой фирмы является общедоступной, но текущие предельные затраты известны только самой фирме. Для такой игры найдено равновесие Байеса–Нэша.

Ключевые слова: олигополия Курно, игра с неполной информацией, равновесие Байеса–Нэша, дифференциация продукции.

Введение

Конкуренция по Курно – это, с одной стороны, активно развивающийся раздел современной теории игр, с другой стороны, обязательная часть любого учебника по индустриальной организации. Но в учебниках, как правило, считается, что у фирм есть вся информация, которая нужна для нахождения равновесных стратегий (равновесий Нэша). В большом числе научных публикаций рассматриваются более сложные модели конкуренции по Курно, когда вместо точных значений тех или иных параметров фирмам известны лишь вероятностные распределения для этих параметров. Тогда вместо равновесий Нэша изучаются равновесия Байеса–Нэша.

В статьях [1, 2] рассматривается игра, когда у фирм отсутствует полная информация о текущих предельных затратах $c_1, \ldots, c_n$, и все фирмы производят однородный товар. Фирме i известны свои текущие предельные затраты c_i и не известны текущие предельные затраты фирм-конкурентов. Однако некоторой информацией о совместном распределении случайных величин $C_1, \ldots, C_n$ (которые служат вероятностной моделью для $c_1, \ldots, c_n$) фирмы обладают. При нахождении равновесия Байеса–Нэша для такой игры в работе [2] допущена ошибка. Эта ошибка исправляется в работе [1].

В настоящей работе результат из [1] обобщается для задач с дифференциацией продукции. В разделе 1 дается обзор литературы. В разделе 2 строится система уравнений для равновесных стратегий, в разделе 3 эта система уравнений решается.

1. Обзор литературы

Теория олигополии, основы которой заложены в [3], играет важную роль при определении фирмами своих действий. Конкуренция, когда фирмы соперничают друг с другом и пытаются увеличить свою прибыль, используя в качестве стратегий объемы выпускаемой продукции, называется конкуренцией по Курно. (В отличие от конкуренции по Бертрану, когда стратегиями являются цены на продукцию.) Говоря современным языком, можно сказать, что в этой своей части книга [3] относится к теории некооперативных игр, и что в ней ищется равновесие Нэша. Применительно к этой игре равновесие Нэша принято называть равновесием Курно–Нэша.

Строгое доказательство существования равновесия Курно–Нэша для случая, когда фирмы производят однородный товар, приводится в статье [4], также в этой статье даются ссылки на предшествующие публикации, в которых содержатся частные случаи доказанной теоремы. В работе [5] при исследовании устойчивости равновесия Курно–Нэша ослабляется предположение, что все фирмы производят однородный товар, но считается, что каждая фирма производит только один товар. Такие задачи называются задачами с дифференциацией продукции. (Во многих случаях при этом считается, что производимые фирмами товары являются субститутами.) Конкуренция по Бертрану при дифференциации продукции по методам исследования и по результатам оказывается значительно более похожей на конкуренцию по Курно, чем в случае, когда все фирмы производят однородный товар. Моделям с дифференциацией продукции уделяется значительное внимание в литературе.

Сравнение конкуренции по Курно и конкуренции по Бертрану при дифференциации продукции проводится, в частности, в работах [6, 7]. В работе [8] для случая дифференциации продукции изучается дуополия Бертрана–Эджворта (когда производственные возможности фирм ограничены). В работах [9, 10], также при дифференциации продукции, изучается модель Курно–Бертрана, в которой стратегиями одних фирм являются объемы выпускаемой продукции, а стратегиями других фирм – цены. В работе [11] даются микроэкономические обоснования для линейной функции спроса при дифференциации продукции. В работе [12] рассматриваются задачи с двумя разными типами потребителей, осведомленными и неосведомленными. В работе [13] представлены относительные преимущества и недостатки фиксированных выплат и роялти при покупке лицензий.

Конкуренция по Курно при неполной информации изучалась многими авторами. В работах [14, 15] рассмотрена модель дуополии, где каждая из фирм обладает своей информацией относительно спроса. Также роль информации исследуется в работах [16, 17]. В статье [18] изучается модель олигополии, где фирмы обладают частной информацией и относительно кривой спроса, и относительно предельных затрат, при этом все фирмы считаются одинаковыми. В работе [19] рассматриваются картельные соглашения, когда при конкуренции по Курно фирмы обладают частной информацией относительно затрат. В работе [20] изучается конкуренция по Курно для игры, состоящей не из одного, а из двух этапов. В работе [21] сравниваются конкуренция по Курно и конкуренция по Бертрану при случайной выработке. В статье [22] рассматривается робастное равновесие для задач с неопределенностью. В работе [23] изучается вопрос, как информация о затратах конкурентов влияет на решения фирмы относительно развития и исследований. В ряде работ, например, в [24, 25] рассматриваются динамические модели. В работах [26, 27] изучается конкуренция в условиях неопределенности при дифференциации продукции. Более подробный обзор литературы по конкуренции Курно можно найти в работе [28].

2. Система уравнений для равновесных стратегий

Пусть каждая из n фирм производит один товар, обратная функция спроса на товар фирмы i (функция цены) имеет вид

$$P_i(q_1, \dots, q_n) = a_i - bq_i - \gamma \sum_{j \neq i} q_j,$$

где $a_1, \dots, a_n$, b и γ – положительные числа, $\gamma < 2b$, $q_1, \dots, q_n$ – объемы выпуска для n фирм. Прибыль фирмы i

$$\pi_i(c_i, q_1, \dots, q_n) = \left(a_i - bq_i - \gamma \sum_{j \neq i} q_j \right) q_i - c_i q_i,$$

где c_i – текущие предельные затраты фирмы i, $i = 1, \dots, n$.

Стратегией фирмы j называется функция s_j, которая ставит в соответствие текущим предельным затратам c_j выпуск q_j,

$$s_j(c_j) = q_j.$$

Пусть C_j – это случайная величина, которая является вероятностной моделью для текущих предельных затрат c_j. Предполагается, что

$$E(C_j) = \mu_j,$$

где μ_j – средние предельные затраты фирмы j. Других предположений о совместном распределении случайных величин $C_1, \dots, C_n$ кроме существования этих ожиданий не делается. Ожидаемая прибыль фирмы i

$$\Pi_i(c_i, q_i) = \left(a_i - bq_i - \gamma \sum_{j \neq i} E\left(s_j(C_j) \right) \right) q_i - c_i q_i. \tag{1}$$

Напомним, что квантильная функция случайной величины C_j имеет вид

$$r_j(p) = \inf \Xi_{jp},$$

где

$$\Xi_{jp} = \{\xi \in R\colon \mathit{Prob}(C_j \leq \xi) > p\}, \quad 0 < p < 1.$$

Предположим, что φ – борелевская функция и ожидание случайной величины $\varphi(C_j)$ существует. Тогда

$$E\left(\varphi(C_j)\right) = \int_0^1 \varphi\left(r_j(p)\right) dp \tag{2}$$

(см., например, [29]).

Профиль стратегий $s_1, \dots, s_n$ называется равновесием Байеса–Нэша, если

$$\Pi_i\big(c_i, s_i(c_i)\big) = \max_{q_i} \Pi_i(c_i, q_i)$$

при всех i и при всех c_i.

Для краткости рассмотрим $i = 1$ и не будем указывать индекс, обозначающий фирму 1. Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{d}{dq}\Pi(c, q) = -2bq + (a - c) - \gamma \sum_{j=2}^{n} \int_0^1 s_j\left(r_j(p)\right) dp.$$

Условие

$$\frac{d}{dq}\Pi(c, q) = 0$$

приводит к соотношению

$$-2bq + (a - c) = \gamma \sum_{j=2}^{n} \int_0^1 s_j\left(r_j(p)\right) dp.$$

Решение q последнего уравнения является точкой максимума из-за того, что

$$\frac{d^2}{dq^2}\Pi(c, q) < 0$$

при $b > 0$. Поскольку s – это равновесная стратегия, имеем

$$-2bs(c) + (a - c) = \gamma \sum_{j=2}^{n} \int_0^1 s_j\left(r_j(p)\right) dp. \tag{3}$$

Таким образом, система уравнений для равновесных стратегий имеет вид

$$-2bs_i(c) + (a_i - c_i) = \gamma \sum_{j \neq i} \int_0^1 s_j\left(r_j(p)\right) dp, \quad i = 1, \dots, n.$$

3. Решение системы уравнений для равновесных стратегий

Предположим, что функция s является непрерывно дифференцируемой. Тогда из (3) вытекает, что

$$-2bs'(c) - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$s(c) = -\frac{c}{2b} + \delta, \tag{4}$$

где значение δ должно быть определено. После подстановки (4) в (3) имеем

$$-2b\left(-\frac{c}{2b} + \delta\right) + (a - c) = \gamma \sum_{j=2}^{n} \int_0^1 \left(-\frac{r_j(p)}{2b} + \delta_j\right) dp.$$

Используя (2) при $\varphi(c) = c$, получаем

$$-2b\left(-\frac{c}{2b}+\delta\right)+(a-c)=\ \gamma\sum_{j=2}^{n}\left(-\frac{\mu_j}{2b}+\delta_j\right)$$

или после сокращений

$$-2b\delta+a=\gamma\sum_{j=2}^{n}\delta_j-\frac{\gamma}{2b}\sum_{j=2}^{n}\mu_j.$$

Введем обозначения

$$\bar{a}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j,\qquad \bar{\delta}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_j,\qquad \bar{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu_j.$$

Последнее уравнение (переходя от рассмотрения фирмы 1 к рассмотрению произвольной фирмы i) можно записать в виде

$$-2b\delta_i+a_i=\gamma\left(n\bar{\delta}-\delta_i\right)-\frac{\gamma}{2b}(n\bar{\mu}-\mu_i),\qquad i=1,\dots,n. \tag{5}$$

Складывая уравнения (5), получаем

$$(\gamma-2b)n\bar{\delta}+n\bar{a}=\gamma n^2\bar{\delta}-\frac{\gamma}{2b}n(n-1)\bar{\mu}.$$

Введем обозначения

$$y=\frac{\gamma}{b},\quad z=2-y.$$

Тогда из последнего уравнения следует, что

$$\bar{\delta}=\frac{0.5(n-1)y\bar{\mu}+\bar{a}}{b(ny+z)}.$$

В силу (5)

$$\delta_i=\frac{\gamma n\bar{\delta}-0.5y(n\bar{\mu}-\mu_i)-a_i}{\gamma-2b}.$$

Воспользовавшись тем, что $\gamma-2b=-bz$, получаем

$$\delta_i=\frac{1}{bz}\left\{a_i+0.5y(n\bar{\mu}-\mu_i)-ny\frac{0.5(n-1)y\bar{\mu}+\bar{a}}{ny+z}\right\}=$$

$$=\frac{1}{bz(ny+z)}\{(ny+z)a_i-ny\bar{a}+0.5y(ny+z)(n\bar{\mu}-\mu_i)-0.5y^2n(n-1)\bar{\mu}\}=$$

$$=\frac{1}{bz(ny+z)}\{(ny+z)(a_i-\bar{a})+z(\bar{a}-\bar{\mu})+(z+0.5nyz+0.5ny^2)\bar{\mu}-0.5y(ny+z)\mu_i\}=$$

$$=\frac{1}{bz(ny+z)}\{(ny+z)(a_i-\bar{a})+z(\bar{a}-\bar{\mu})+(ny+z)\bar{\mu}-0.5y(ny+z)\mu_i\}.$$

В силу (4) находим

$$s_i(c_i)=-\frac{c_i}{2b}+\delta_i= \tag{6}$$

$$=\frac{1}{bz(ny+z)}\left\{(ny+z)(a_i-\bar{a})+z(\bar{a}-\bar{\mu})+(ny+z)\left(\bar{\mu}-\frac{y\mu_i+zc_i}{2}\right)\right\}.$$

Из формулы (6) следует, что чем больше текущие предельные затраты c_i, тем меньше равновесный объем выпуска фирмы i. Ограничимся рассмотрением случая, когда все фирмы остаются на рынке при любых своих возможных текущих предельных затратах c_i (то есть выполняется условие $s_i(c_i)\geq 0$). Для этого обозначим

$$\lambda_i = \lim_{p\to 1} r_i(p)$$

и будем предполагать, что $s_i(\lambda_i) \geq 0$ при любом i.

В частности, для случая, когда все фирмы производят однородный товар, то есть $a_1 = \cdots = a_n = a$, $b = \gamma$ и $y = z = 1$, формула (6) принимает вид

$$s_i(c_i) = \frac{1}{b(n+1)}\left\{(\bar{a} - \bar{\mu}) + (n+1)\left(\bar{\mu} - \frac{\mu_i + c_i}{2}\right)\right\}, \tag{7}$$

что совпадает с формулой для равновесных стратегий, полученной в [2].

Результат, следующий из формулы (7), является несколько неожиданным. Для определения равновесного объема выпуска q_i сравнивать со средними по отрасли предельными затратами $\bar{\mu}$ фирме i следует не свои средние предельные затраты μ_i и не свои текущие предельные затраты c_i, а $0.5(\mu_i + c_i)$. При дифференциации продукции, когда $\gamma < b$, в этом случае $0 < y < 1 < z$, согласно формуле (6), больший вклад во взвешенную сумму $0.5(y\mu_i + zc_i)$ вносят текущие предельные затраты c_i и меньший – средние предельные затраты μ_i.

4. Заключение

В работе найдены новые равновесия Байеса–Нэша для одной из игр, относящихся к теории олигополии Курно. При этом используется новый для данной области метод, выражение моментов случайной величины через интегралы от квантильной функции. Ранее этот метод для нахождения равновесий Байеса–Нэша использовался только в [2].

Рассматриваются линейные обратная функция спроса и функции затрат, это позволяет получить выражения для равновесных стратегий в явном виде. Однако указанный метод может быть применен и для исследования нелинейных задач (и линейных задач с большим числом параметров). Но тогда систему уравнений для равновесных стратегий следует решать численно.

Литература

1. *Shvedov A.S.* A note on Cournot equilibria under incomplete information // Economics Bulletin. – 2022. – Vol. 42, № 2. – P. 788–792.
2. *Lofaro A.* On the efficiency of Bertrand and Cournot competition under incomplete information // European J. of Political Economy. – 2002. – Vol. 18, № 3. – P. 561–578.
3. *Cournot A.* Recherches sur les principes mathématiques de la théorie de richesse. – Paris: Hachette, 1838. – 212 p.
4. *Frank C.R., Quandt R.E.* On the existence of Cournot equilibrium // Int. Economic Review. – 1963. – Vol. 4, № 1. – P. 92–96.
5. *Hadar J.* Stability of Oligopoly with Product Differentiation // Review of Economic Studies. – 1966. – Vol. 33. – P. 57–60.
6. *Singh N., Vives X.* Price and quantity competition in a differentiated duopoly // Rand J. of Economics. – 1984. – Vol. 15. – P. 546–554.
7. *Häckner J.* A note on price and quantity competition in differentiated oligopolies // J. of Economic Theory. – 2000. – Vol. 93. – P. 233–239.
8. *Canoy M.* Product differentiation in a Bertrand–Edgeworth duopoly // J. of Economic Theory. – 1996. – Vol. 70. – P. 158–179.
9. *Tremblay C.H., Tremblay V.J.* The Cournot–Bertrand model and the degree of product differentiation // Economics Letters. – 2011. – Vol. 111. – P. 233–235.
10. *Askar S.S.* On Cournot–Bertrand competition with differentiated products // Annals of Operations Research. – 2014. – Vol. 223. – P. 81–93.
11. *Amir R., Erickson P., Jin J.Y.* On the microeconomic foundations of linear demand for differentiated products // J. of Economic Theory. – 2017. – Vol. 169. – P. 641–665.
12. *Cosandier C., Garcia F., Knauff M.* Price competition with differentiated goods and incomplete product awareness // Economic Theory. – 2018. – Vol. 66. – P. 681–705.
13. *Wang X.H.* Fee versus royalty licensing in a differentiated Cournot duopoly // J. of Economics and Business. – 2002. – Vol. 54. – P. 253–266.
14. *Novshek W., Sonnenschein H.* Fulfilled expectations Cournot duopoly with information acquisition and release // Bell Journal of Economics. – 1982. – Vol. 13. – P. 214–218.
15. *Vives X.* Duopoly information equilibrium: Cournot and Bertrand // Journal of Economic Theory. – 1984. – Vol. 34. – P. 71–94.
16. *Gal-Or E.* Information transmission – Cournot and Bertrand equilibria // Review of Economic Studies. – 1986. – Vol. 53. – P. 85–92.

17. *Sakai Y.* Cournot and Bertrand equilibria under imperfect information // Journal of Economics. – 1986. – Vol. 46. – P. 213–232.
18. *Palfrey T.R.* Information aggregation and the Cournot competitive limit // Review of Economic Studies. – 1985. – Vol. 52. – P. 69–83.
19. *Cramton P.C., Palfrey T.R*. Cartel enforcement with uncertainty about costs // International Economic Review. – 1990. – Vol. 31. – P. 17–47.
20. *Lepore J.J.* Cournot and Bertrand – Edgeworth competition when rivals' costs are unknown // Economics Letters. – 2008. – Vol. 101. – P. 237–240.
21. *Yan X., Wang Y., Hong Z.* Comparison of Bertrand and Cournot competitions under random yield // International Journal of Production Research. – 2016. – Vol. 54. – P. 3256–3276.
22. *Crespi G.P., Radi D., Rocca M.* Robust games: theory and application to a Cournot duopoly model // Decisions in Economics and Finance. – 2017. – Vol. 40. – P. 177–198.
23. *Chatterjee R., Chattopadhyay S., Kabiraj T.* R&D in a duopoly under incomplete information // International Journal of Economic Theory. – 2019. – Vol. 15. – P. 341–359.
24. *Bonatti A., Cisternas G., Toikka J.* Dynamic oligopoly with incomplete information // Review of Economic Studies. – 2017. – Vol. 84. – P. 503–546.
25. *Алгазин Г.И., Алгазина Ю.Г.* Рефлексивная динамика в условиях неопределенности олигополии Курно // Автоматика и телемеханика. – 2020. – № 2. – С. 115–133.
26. *Chiarella C., Szidarovszky F.* Cournot oligopolies with product differentiation under uncertainty // Computers and Mathematics with Applications. – 2005. – Vol. 50. – P. 413–424.
27. *Ferreira F.A., Pinto A.A.* Uncertainty on a Bertrand duopoly with product differentiation // in: Nonlinear Science and Complexity (J.A.T. Machado, A.C.J. Luo, R.S. Barbosa, M.F. Silva, L.B. Figueiredo, eds.), Springer, 2011. – P. 389–395.
28. *Шведов А.С.* Олигополия Курно: выбор стратегий при неопределенности и другие вопросы // Проблемы управления. – 2023. – № 5. – С. 23–39.
29. *Шведов А.С.* Квантильная функция нечетко-случайной величины и выражения для ожиданий // Математические заметки. – 2016. – Т. 100, № 3. – С. 455–460.