НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЗАМКНУТОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА В МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА[1]

Никаноров С.О.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
nikanorovso@yandex.ru
Павлова Н.Г.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Москва, Россия
natasharussia@mail.ru

Аннотация. В данной работе исследована непрерывная динамическая модель межотраслевых балансовых отношений В.В. Леонтьева. Целью исследования был выбран поиск необходимых условий замкнутости технологического множества в данной модели. Замкнутость является одним из основных свойств технологического множества, и, как следствие, нахождение необходимых условий замкнутости позволяет делать выводы о корректности составленной или рассматриваемой модели. Были получены необходимые условия замкнутости в модели Леонтьева в случае, когда матрицы прямых затрат и прироста основных производственных фондов не являются диагональными. Также в рассматриваемой модели присутствует управление, в качестве которого выступает вектор-функция непроизводственного потребления.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, модель Леонтьева, технологическое множество, замкнутость.

Введение

Модель Василия Васильевича Леонтьева межотраслевых балансовых отношений была сформулирована им в тридцатых годах двадцатого века на базе работы центрального статистического управления СССР (см. [1, 2]), в которой Львом Николаевичем Литошенко и Павлом Ильичем Поповым был разработан первый отчетный баланс народного хозяйства за 1923-1924 годы. Межотраслевой баланс отражает взаимосвязь между производством и потреблением ресурсов между отдельными отраслями экономической системы. При этом каждая отрасль рассматривается и как потребитель продукции других отраслей, и как производитель продукции для собственных нужд и нужд других отраслей экономики. В. В. Леонтьев подготовил отчет на работу ЦСУ и позднее, в 1925 году, применил метод анализа межотраслевых связей для исследования экономики США. В идее модели межотраслевого баланса лежит экономическое равновесие. То есть, все, что производится в экономической системе – потребляется полностью, при этом не возникает недостатка сырья. Модель Леонтьева представляет собой линейную статическую модель многоотраслевой экономики, зачастую формируется в виде таблицы, элементы которой описывают количество одного блага, необходимого для производства другого блага. Первые модели межотраслевого баланса были статическими, однако данный подход к исследованию экономической системы не позволяет оценивать изменение с течением времени, а также прогнозировать поведение системы при изменении ее параметров. В то время, как динамические модели позволяют отразить процесс развития экономики и установить связь между этапами развития (см. [3]). В динамических моделях производственные капитальные вложения выделяются из состава конечной продукции, исследуются их структура и влияние на рост объёма производства. Важность вопроса замкнутости технологического множества в моделях межотраслевого баланса обусловлена тем, что является одним из основных свойств. Технологическое множество состоит из всех технологически допустимых векторов чистых выпусков продукции. Замкнутость технологического множества, в свою очередь, показывает возможность применения «крайних» режимов производства. Соответственно, в случае если технологическое множество в модели Леонтьева не является замкнутым означает, что модель составлена некорректно.

Рассматриваемая нами модель описывается системой линейных дифференциальных уравнений. В качестве элементов модели присутствуют вектор-функция валового выпуска отраслей, а также вектор-функция прироста валового выпуска. Также рассматриваются матрицы прямых затрат и величин прироста основных производственных фондов. В качестве управления в исследуемой модели выступает вектор непроизводственного потребления, его также называют вектором конечного

[1] *Работа выполнена Павловой Н.Г. при финансовой поддержке гранта РНФ (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/).*

потребления. С экономической точки зрения, непроизводственное потребление может выступать как переменная, которая изменяется за счет государственного регулирования. За счет этого государство может влиять на экономическую систему, перераспределяя блага в рамках отраслей. Стоит отметить, что зачастую матрицы, упомянутые выше, рассматриваются в диагональном виде, что значительно упрощает процесс исследования и расчетов при моделировании. Данный подход к исследованию экономической системы является упрощенным, так как модель Леонтьева строится с использованием статистических данных, и, как следствие нулевые элементы вне диагонали почти не встречаются. В нашем исследовании матрицы изначально имеют произвольный вид размерности $n \times n$. Соответственно была поставлена задача создать некоторую методологическую базу для взаимодействия с теми системами, в которых матрицы не являются диагональными, и получить необходимые условия замкнутости технологического множества для данных моделей.

1. Формализация задачи

Представим модель как управляемую систему. Заметим, что в качестве управления можно взять вектор конечного потребления u. Однако в данной работе нас будут интересовать свойства технологического множества, поэтому свойства, связанные с вектором u как управлением, здесь изучаться не будут. Итак, рассмотрим линейную управляемую систему:

$$x = Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь
$x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор фазового состояния системы,
$A = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1, n}$ – матрица размерности $n \times n$,
$B = (b_{ij})$, $b_{ij} \in \mathbb{R}_+$ – матрица той же размерности, что и A,
$u = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор управления,
$t \in [0, T]$, где T – конечный момент времени.

Заданы ненулевые векторы $v_i \in \mathbb{R}^n$ для которой $v_i \in K$, где K – заданный выпуклый конечнопорожденный конус

$$K = \{v \in \mathbb{R}^n : v = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \lambda_i \geq 0, v_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{i, k}\},$$

а $v_i \neq 0 \ \forall \ i = \overline{1, k}$ – заданные векторы из $\mathbb{R}^n$.

Допустимым управлением в задаче (1), (2) является всякая существенно ограниченная функция $u(t) \in K$ для п.в. $t \in [0, T]$.

Пусть D_T – множество достижимости в момент времени T, т.е. множество всех точек фазового пространства $\mathbb{R}^n$, которые могут быть достигнуты в момент времени T из точки $x(0) = 0$ по решениям системы при всех возможных допустимых управлениях $u(\cdot)$:

$$D_T = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x(T), x - \text{решение задачи } (1), (2)\}.$$

Для получения необходимых условий замкнутости технологического множества воспользуемся следствием теоремы, доказанной в [4].

Положим $\tilde{A}^{\{i\}} = (E - A)^i$ и определим матрицы

$$B_i = \tilde{A}^{\{i-1\}} \tilde{B}, \ i = \overline{1, n}.$$

Теорема 1.

Пусть для любого $i \in \overline{1, k}$ справедливо равенство

$$\operatorname{rang}\{B_1 v_i, B_2 v_i, \dots, B_n v_i\} = n.$$

Тогда множество $D_T \setminus \{0\}$ является открытым.

Следствие.

Из теоремы (1) следует, что для того, чтобы множество $D_T \setminus \{0\}$ являлось замкнутым, необходимо, чтобы $\operatorname{rang}\{B_1 v_i, B_2 v_i, \dots, B_n v_i\} < n$.

2. Описание модели Леонтьева

Опишем модель Леонтьева, как это было сделано в [5]:

«В экономической системе производятся, реализуются, потребляются и инвестируются $n \in \mathbb{N}$ типов ресурсов (товаров). При этом каждая отрасль производит только один уникальный тип продукта, то есть различные отрасли производят различные типы ресурсов. Под производственным процессом в каждой отрасли подразумевается преобразование некоторых типов ресурсов, взятых в определенных количествах, в некоторое количество ресурса одного соответствующего типа. При этом соотношение затрачиваемых ресурсов и выпускаемого продукта предполагается постоянным.

Исходя из свойств технологического множества была поставлена задача исследовать вопрос замкнутости. Была исследована открытая динамическая модель Леонтьева межотраслевых балансовых соотношений, которая описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x = \tilde{A}x + \tilde{B}\dot{x} + u, \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \tag{4}$$

Здесь

$x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in [0, T]$, – вектор валовых выпусков отраслей,

$\tilde{A} = \big(\tilde{a}_{ij}\big), \ \tilde{a}_{ij} \in \mathbb{R}_+, i, j = \overline{1, n}$ – матрица прямых затрат размерности $n \times n$,

$\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}), \ \tilde{b}_{ij} \in \mathbb{R}_+ \ i, j = \overline{1, n}$ – матрица прироста основных производственных фондов, той же размерности, что и $\tilde{A}$,

$\dot{x}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, T]$, – прирост выпуска отраслей,

$u(t) = \big(u_1(t), \dots, u_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n_+, \ \dot{\forall} t \in [0, T]$, – функция непроизводственного потребления.

Матрица $\tilde{A}$ является продуктивной. Условие продуктивности матрицы $\tilde{A}$ заключается в том, что все элементы матрицы неотрицательные и для любого вектора $v \in \mathbb{R}^n_+$ найдется такой вектор $w \in \mathbb{R}^n_+$, что $\tilde{A}w + v = w$.

Всякую существенно ограниченную функцию u будем называть допустимой функцией непроизводственного потребления или допустимым управлением, для которой $u(t) \in \mathbb{R}^n_+$ для п.в. t.

Технологическим множеством в момент времени T называется множество

$$P_T = \{\big(-\tilde{A}y, y\big) : y \in D_T\}. \tag{5}$$

Здесь D_T – множество достижимости, т.е. $D_T = \{ y \in \mathbb{R}^n : \exists\, u(\cdot), y = x(T)$, где x – решение задачи (3), (4), соответствующее $u(\cdot)\}$ – множество достижимости в момент времени T. Если интерпретировать D_T с экономической точки зрения, то это множество всех возможных векторов валовых выпусков, которые можно получить на временном промежутке $[0, T]$ при всех возможных допустимых функциях непроизводственного потребления. Технологическое множество формализует множество всех технологически допустимых векторов «выпусков–затрат» продукции. Одним из свойств технологического множества является достижимость предельных производственных планов, другими словами замкнутость.

Таким образом, если в исследуемой модели технологическое множество не является замкнутым, то такая модель не является корректной и не может описывать процессы, происходящие в реальной экономике. Исходя из этого, одним из важных этапов исследования модели Леонтьева является получение условий замкнутости технологического множества.»

Теперь перейдем к основному результату работы, а именно: необходимым условиям замкнутости технологического множества, определенного формулой (5), в модели, определенной формулами (1), (2).

3. Основной результат

Воспользуемся теоремой (1) и следствием, описанным в пункте 2.

Теорема 2. Пусть технологическое множество P_T в момент времени T в динамической модели Леонтьева (1),(2) замкнуто. Тогда $\exists i = \overline{1, n}$:

$$\det\{\bar{B}^{-1}g_i, \bar{B}^{-1}(E - \bar{A})g_i, \dots, \bar{B}^{-1}(E - \bar{A})^{n-1}\bar{B}^{-1}g_i\} = 0,$$

где

$$\bar{B} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

$g_1, \dots, g_n$ – собственные векторы,
$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – соответствующие собственные значения матрицы B,
$A = S\bar{A}S^{-1}$,
S – матрица перехода к базису векторов $g_1, \dots, g_n$.

Доказательство.

Воспользуемся теоремой (1). $B_i, i = \overline{1, n}$ для системы (3), (4) примет вид:

$$B_1 = -\bar{B}^{-1},$$

$$B_2 = -\bar{B}(E - \bar{A})\bar{B}^{-1},$$

$$\dots$$

$$B_n = -\left(\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\right)^{(n-1)}\bar{B}^{-1}.$$

Для рассматриваемой задачи

$$v_1 = (1,0, \dots ,0),$$

$$v_2 = (0,1, \dots ,0),$$

$$\dots$$

$$v_n = (0,0, \dots ,1).$$

Тогда $\forall\ i = \overline{\{1, n\}}$:

$$\mathrm{rang}\{B_1 v_i, B_2, v_i, \dots, B_n v_i\} =$$

$$= \mathrm{rang}\{\bar{B}^{-1}v_i, \bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\bar{B}^{-1}v_i, \dots, \left(\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\right)^{(n-1)}\bar{B}^{-1}v_i\}.$$

Отсюда $\forall\ i = \overline{1, n}$:

$$\mathrm{rang}\{B_1 v_i, B_2, v_i, \dots, B_n v_i\} =$$

$$= \mathrm{rang}\{(S\bar{B}S^{-1})^{-1}v_i, (S\bar{B}S^{-1})^{-1}(E - S\{\bar{A}\}S^{-1})(S\bar{B}S^{-1})^{-1}B^{-1}v_i, \dots,$$

$$\left((S\bar{B}S^{-1})^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})\right)^{(n-1)}(S\bar{B}S^{-1})^{-1}v_i\} =$$

$$= \mathrm{rang}\{S\bar{B}^{-1}S^{-1}v_i, S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})S\bar{B}^{-1}\ S^{-1}\ v_i,$$

$$\dots, \left(S\bar{B}^{-1}S^{-1}\ (E - S\bar{A}\ S^{-1}\ )\right)^{n-1}\ S\bar{B}^{-1}\ S^{-1}\ v_i\ \}.$$

В силу свойств матрицы перехода получаем, что $\forall\ i = \overline{1, n}$

$$\mathrm{rang}\{B_1 v_i, B_2 v_i, \dots, B_n v_i\} =$$

$$= \mathrm{rang}\{S\bar{B}^{-1}g_i, S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})S\bar{B}^{-1}g_i, \dots, \left(S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})\right)^{n-1}S\bar{B}^{-1}g_i\}.$$

Легко видеть, что

$$E - S\bar{A}S^{-1} = S(E - \bar{A})S^{-1}.$$

Тогда

$$S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E - S\bar{A}S^{-1})S\bar{B}^{-1} =$$

$$= S\bar{B}^{-1}S^{-1}S(E - \bar{A})S^{-1}S\bar{B}^{-1} =$$

$$= S\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\bar{B}^{-1}, \left(S\bar{B}^{-1}S^{-1}(E = S\bar{A}S^{-1})\right)^{n-1}S\bar{B}^{-1} =$$

$$= (S\bar{B}^{-1}S^{-1}S(E - \bar{A})S^{-1})^{n-1}S\bar{B}^{-1} =$$

$$= (S\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})S^{-1})^{n-1}S\bar{B}^{-1} = S\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})S^{-1}S^{-1}S\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})S^{-1} \dots S\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})S^{-1}S\bar{B}^{-1} =$$

$$= S\left(\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\right)^{n-1}S^{-1}S\bar{B}^{-1} =$$

$$= S\left(\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\right)^{n-1}\bar{B}^{-1}.$$

Таким образом:

$$\forall\, i = \overline{1, n}$$

$$\operatorname{rang}\{B_1 v_i, b_2 v_i, \dots, B_n v_i\} =$$

$$= \operatorname{rang}\{\bar{B}^{-1} g_i, \bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\bar{B}^{-1} g_i, \dots, \left(\bar{B}^{-1}(E - \bar{A})\right)^{n-1} \bar{B}^{-1} g_i\}.$$

Остается отметить, что условие $\forall\, i = \overline{1, n}$

$$\operatorname{rang}\{B_1 v_i, B_2 v_i, \dots, B_n v_i\} < n$$

эквивалентно уравнению

$$\exists\, i = \overline{1, n}\colon \det\{B_1 v_i, B_2 v_i, \dots, B_n v_i\} = 0.$$

Теорема доказана.

4. Заключение

Как было отмечено ранее, полученный результат позволяет при несложных вычислительных операциях определить замкнутость технологического множества, или, что то же самое, достижимость предельных процессов производства в моделируемой экономике, что, с одной стороны, позволяет понять, насколько данная модель близка к описанию реального положения дел, а с другой – возможно ли в текущей экономической ситуации в регионе использовать производственные фонды на полную мощность. Данный результат интересен также для дальнейших исследований, в которых используется предельный переход по наборам векторов производства, или технологий.

Исследование топологических свойств технологического множества является важной малоисследованной задачей при изучении модели Леонтьева. Стоить отметить, что большинство исследований в данном направлении проводятся в рамках рассмотрения моделей, где матрицы прямых затрат и прироста основных производственных фондов являются диагональными. В рамках своих исследований мы стремимся рассматривать более общие случаи, которые более полно описывают экономическую систему. Полученные результаты позволяют исследовать модели, в которых представленные матрицы имеют произвольный вид. Соответственно – появляется возможность решать более сложные задачи, используя аппарат дифференциального анализа и линейной алгебры.

Литература

1. *Леонтьев В.* Предисловие. – Межотраслевая экономика – М.: Экономика / Научный редактор и автор предисловия академик РАН А. Г. Гранберг; Пер. с англ.., 1997. – С. 19–20. – 480 с.
2. *Леонтьев В.* Спад и подъём советской экономической науки – Экономические эссе: Теории, исследования, факты и политика. – М.: Политиздат, 1990. – С. 218.
3. *Dobos I., Floriska A.* A Dynamic Leontief Model with Non-renewable Resources. – Economic Systems Research, Taylor & Francis Journals, 2005. – Vol. 17(3). – P. 317–326.
4. *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г.* О топологических свойствах множества достижимости линейных систем. – Дифференц. уравнения, 2004. – Том 40, номер 11. – С. 1564–1566.
5. *Никаноров С.О., Павлова Н.Г.* Study of the Continuous-Time Open Dynamic Leontief Model as a Control System – Proceedings of the 16th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). Moscow: IEEE, 2023. С. https://ieeexplore.ieee.org/document/10303878.