О ПОЛОЖЕНИИ РАВНОВЕСИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТИПА АЛЛЕНА

Котюков А.М.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

amkotyukov@mail.ru

Павлова Н.Г.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, Тамбов, Россия

natasharussia@mail.ru

Аннотация. Доклад посвящен вопросу о существовании равновесного состояния в динамической модели типа Аллена, динамика которой определяется разностью двух отображений. С помощью результатов теории накрывающих отображений и точек совпадения получены достаточные условия существования положения равновесия для этой системы.

Ключевые слова: положение равновесия, импорт, модель Аллена.

Введение

В современном исследовании динамических процессов особое внимание уделяется проблеме существования положения равновесия, а также частичного, т.е. равновесия по части переменных фазового вектора. В различных моделях биологии, физики, экономики, транспортных потоков и макросистем положение равновесия выполняет роль стационарного состояния, в котором система может функционировать сколь угодно долго. Зачастую вопрос о существовании положения равновесия или частичного равновесия сводится к исследованию на разрешимость систем нелинейных алгебраических уравнений и неравенств. Общеизвестные методы исследования могут быть неприменимы в случае положения частичного равновесия, поскольку количество уравнений не совпадает с количеством переменных величин. Однако, решение задачи о существовании у системы положений частичного равновесия может дать теория накрывающих отображений и точек совпадения, активно развиваемая Аваковым Е.Р., Арутюновым А.В., Гельманом Б.Д., Дмитруком А.В., Дыхтой В.А., Жуковскими Е.С. и С.Е., Милютиным А.А., Обуховским В.В., Шоке Г. и другими (см., например, [1–3]).

Вопрос о существовании положения частичного равновесия важен в приложениях к экономическим процессам. В моделях рынков положению равновесия соответствует ситуация, при которой не происходит перепроизводства и спрос на товары всего населения полностью удовлетворен. Такая ситуация является благоприятной с экономической точки зрения.

Настоящая работа посвящена исследованию положения равновесия в системе дифференциальных уравнений, заданной разностью двух отображений и является продолжением исследований, начатых в [5–7]. Перейдем к описанию модели, а также формализации решаемой задачи.

1. Описание модели и постановка задачи

1.1. Описание модели

Обозначим $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, i = \overline{1,n}\}$. Пусть заданы: число $n \in N$ и векторы $p = (p_1, \dots, p_n), c_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n}), c_2 = (c_{21}, \dots, c_{2n}) \in \mathbb{R}^n_+$ такие, что $c_{1i} < c_{2i}, c_{1i} \le p_i \le c_{2i}, i = \overline{1,n}$ (обозначим $P = [c_{11}, c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$). Далее, пусть известны векторы $p^* = (p_1^*, \dots, p_n^*) \in P, D^* = (D_1^*, \dots, D_n^*), S^* = (S_1^*, \dots, S_n^*) \in \mathbb{R}^n_+$. Наконец, пусть нам известны значения матриц $E = \left(E_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $\tilde{E} = \left(\tilde{E}_{ij}\right)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Как показано в [2], набор параметров однозначно определяет отображения $D, S: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$ по следующим формулам:

$$D_i(p) = D_i^* \prod_{j=1}^n \left(p_j^*\right)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \tag{1}$$

$$S_i(p) = S_i^* \prod_{j=1}^n \left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}} + a_i, \tag{2}$$

где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим следующую автономную систему дифференциальных уравнений (модель типа Аллена)

$$\dot{p_i} = S_i(p) - D_i(p) + a_i, i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где $m \leq n$, а отображения $S, D: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+^n$ определены по формулам (1), (2) соответственно.

Определение 1. Динамической моделью типа Аллена называется следующий набор параметров:

$$\sigma = (a, c_1, c_2, p^*, S^*, D^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}), \tag{4}$$

определяющий систему (3).

Задача состоит в том, чтобы найти положения частичного равновесия системы (3), т.е. решить систему

$$S_i(p) - D_i(p) + a_i = 0, c_{1i} \leq p_i \leq c_{2i}, i = \overline{1, m}. \tag{5}$$

2. Накрывающие отображения и точки совпадения

Получение достаточных условий существования решения уравнения (5) представляет собой нетривиальную задачу, поскольку уравнения, входящие в состав этой системы, являются нелинейными. Задача усложняется еще и тем, что нам необходимо найти решение, удовлетворяющее ограничениям, задаваемым векторами c_1 и c_2. Нам будет удобно рассмотреть решение этой системы как точку совпадения двух отображений. В [2] была получена теорема, которая гарантирует существование точки совпадения в случае, если одно из отображений является накрывающим, а другое удовлетворяет условию Липшица. Напомним соответствующие определения.

Итак, рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), на которых определены отображения Ψ, Φ. В пространстве X через $B_X(x, r)$ обозначим замкнутый шар в точке x радиуса r, аналогично определим $B_Y(y, r)$ в пространстве Y.

Определение 2 ([1]). Точка $\xi \in X$ называется точкой совпадения отображений $\Psi, \Phi: X \to Y$, если $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$.

Легко заметить, что решение системы (5) действительно является точкой совпадения отображений $S + a$ и D.

Определение 3 ([1]). Пусть $\alpha > 0$. Если отображение $\Psi: X \to Y$, удовлетворяет следующему условию: $\forall x \in M$, $r > 0$ таких, что $B_X(x, r) \subseteq M$, выполнено включение

$$B_Y(\Psi(x), \alpha r) \subseteq \Psi\big(B_X(x, r)\big),$$

то отображение Ψ называется α-накрывающим на множестве $M \subseteq X$.

В [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 2 ([1]). Пусть пространство X полно и заданы $x_0 \in X, \alpha > 0, R > 0$. Пусть отображение $\Psi: X \to Y$ является α-накрывающим на $B_X(x_0, R)$ и $\operatorname{gph} \Psi$ является замкнутым множеством. Тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi: B_X(x_0, R) \to Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq (\alpha - \beta) R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_Y(x_0, \xi) \leq \frac{\rho_Y\left(\Psi(x_0), \Phi(x_0)\right)}{\alpha - \beta}.$$

3. Основной результат

Здесь и далее норма произвольного линейного оператора$Q: (\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) \to (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$, определенного на нормированных пространствах, задается формулой:

$$\|Q\| = \sup_{\|x\|_{\mathcal{X}} = 1} \|Qx\|_{\mathcal{Y}}.$$

Введем обозначения

$$\hat{a}(\sigma_o) = \min_{i = \overline{1, m}} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \right)^{-1} \right\|^{-1},$$

$$\hat{\beta}(\sigma_o) = \underset{1=\overline{1,m}}{max} D_i^* \left(\prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{|E_{ik}|(c_{2k} - c_{1k})}{2} \underset{l=1,2}{max} \{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} \underset{j=1,2}{max} c_{lj}^{E_{ij}},$$

$$\hat{\gamma}(\sigma_o) = \underset{i=\overline{1,m}}{max} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|.$$

В [5] была доказана следующая теорема:

Теорема 3 ([5]). Пусть параметры модели $\sigma_o \in \Sigma_o$ удовлетворяют условиям:

$$det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^T \neq 0,$$

$$\hat{\gamma}(\sigma) < \hat{\alpha}(\sigma) - \hat{\beta}(\sigma).$$

Тогда в системе (3), определенной моделью σ, существует положение частичного равновесия $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n) \in \mathbb{R}_+^n$ такое, что $c_{1i} \leq \hat{p}_i \leq c_{2i}\ \forall i = \overline{1,n}$.

Доказательство. В пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ определим две нормы:

$$\|x\|_1 = \underset{i=\overline{1,n}}{max} \frac{2|x_i|}{c_{2i} - c_{1i}}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;$$

$$\|y\|_2 = \underset{i=\overline{1,n}}{max} |y_i|, y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Рассмотрим отображения $D, S: (\mathbb{R}^n, \rho_1) \to (\mathbb{R}^m, \rho_2)$, где метрики ρ_1 и ρ_2 порождены нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ соответственно.

Сначала оценим константу Липшица отображения D на множестве P, которую обозначим через $\mathrm{lip}(D|P)$. Известно, что [4]

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij} D_i(p)}{p_j}.$$

Отсюда мы получаем

$$\left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| = \underset{\|x\|_1=1}{max} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) x \right\|_2 = \underset{\|x\|_1=1}{max} \underset{i=\overline{1,m}}{max} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) x_k \right| \leq \underset{\|x\|_1=1}{max} \underset{i=\overline{1,m}}{max} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{E_{ik} D_i(p)}{p_k} x_k \right| =$$

$$= \underset{\|x\|_1=1}{max} \underset{i=\overline{1,m}}{max} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{E_{ik}}{p_k} D_i^* \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} x_k \right| \leq \underset{\|x\|_1=1}{max} \underset{i=\overline{1,m}}{max} \sum_{k=1}^{n} \frac{|E_{ik}|}{p_k} D_i^* |x_k| \prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leq$$

$$\leq \underset{1=\overline{1,m}}{max} D_i^* \left(\prod_{j=1}^{n} (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \sum_{k=1}^{n} \frac{|E_{ik}|(c_{2k} - c_{1k})}{2} \underset{l=1,2}{max} \{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}} \underset{j=1,2}{max} c_{lj}^{E_{ij}} = \hat{\beta}(\sigma).$$

Следовательно,

$$lip(D|P) = \underset{p \in P}{max} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \leq \hat{\beta}(\sigma).$$

Далее, перейдем к оценке константы накрывания отображения S на множестве P, которую мы обозначим через $\mathrm{cov}(S|P)$. Известно [3], что:

$$cov(S|P) = \underset{p \in P}{min}\, cov \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right).$$

Кроме того, в силу [7] имеем

$$cov\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right) \geq \left\|\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^T \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p)\right)^T\right)^{-1}\right\|^{-1} = \hat{\alpha}(p).$$

В силу условия 1) теоремы 3 эта норма конечна.

Следовательно,

$$cov(S|P) \geq \hat{\alpha}(\sigma).$$

В силу условия 2) и неравенств

$$cov(S|P) \geq \hat{\alpha}(\sigma), lip(D|P) \leq \hat{\beta}(\sigma)$$

следует, что найдутся такие α, β, что $\hat{\gamma}(\sigma) < \beta - \alpha$, отображение S является накрывающим на P с константой α, а отображение D удовлетворяет на P условию Липшица с константой β. Поскольку P является полным метрическим пространством (как подпространство $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, то по теореме 2 существует вектор $\hat{p} \in P$ такой, что

$$S_i(\hat{p}) - D_i(\hat{p}) + a_i = 0, i = \overline{1, m}.$$

Кроме того, в силу условия 2) мы получаем, что $\hat{p} \in \operatorname{int} P$, так как в силу теоремы 2

$$\rho_1(\hat{p}, \tilde{c}) \leq \frac{\rho_2\big(S(\tilde{c}), D(\tilde{c})\big)}{\alpha - \beta} < 1.$$

4. Частный случай

В случае $m = n$ система (5) решается достаточно просто. Оказывается, что в этом случае отображения S и D являются биективными. Покажем это на примере отображения S. Рассмотрим уравнение $S(p) = s$, где $s = (s_1, \dots, s_n) \in S(P)$, т.е.

$$S_i^* \prod_{j=1}^{n} \left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}} = s_i, i = \overline{1, n}.$$

Взяв логарифм от левой и правой частей в каждом уравнении этой системы, мы получим эквивалентную систему:

$$ln\, S_i^* + \sum_{j=1}^{n-} \left(\tilde{E}_{ij}\, ln\, p_j - \tilde{E}\, ln\, p_j^*\right) = ln\, s_i\,, i = \overline{1, n}.$$

Отсюда мы получаем следующую эквивалентную систему:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} \tilde{E}_{ij}\, ln\, p_j = ln\left(\frac{s_i}{S_i^*}\right) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{E}_{ij}\, ln\, p_j^*. \tag{6}$$

Если модель σ удовлетворяет условиям теоремы 3, то $\det \tilde{E} \neq 0$. Отсюда по теореме Кронекера-Капелли следует, что система (6) имеет решение, более того, единственное по следствию из нее. Таким образом, отображение S является биективным. Аналогичные рассуждения справедливы и для отображения D.

Поскольку отображение S биективно, мы можем рассмотреть отображение $B: P \to \mathbb{R}_+^n, B = S^{-1} \circ (D - a)$, а задачу поиска положения равновесия – как задачу поиска неподвижной точки отображения B. Достаточные условия существования положения, изложенные ниже, следуют из теоремы Банаха о неподвижной точке.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{\alpha}(\sigma) = \underset{i=\overline{1,n}}{m.ax} \frac{2}{c_{2i} - c_{1i}} \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{|\tilde{F}_{ki}|\, max\left\{c_{1i}^{1-\tilde{E}_{ki}}, c_{2i}^{1-\tilde{E}_{ki}}\right\}}{S_k^* \prod_{j=1}^{n}\left(p_j^*\right)^{-\tilde{E}_{kj}} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} min\left\{c_{1i}^{\tilde{E}_{kj}}, c_{2i}^{\tilde{E}_{kj}}\right\}}, \tag{7}$$

$$\bar{\beta}(\sigma) = \underset{1=\overline{1,m}}{max}\, D_i^* \left(\textstyle\prod_{j=1}^{n}\left(p_j^*\right)^{-E_{ij}}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{|E_{ik}|(c_{2k} - c_{1k})}{2} \underset{l=1,2}{max}\left\{c_{lk}^{E_{ik}-1}\right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}} \underset{j=1,2}{max}\, c_{lj}^{E_{ij}}, \tag{8}$$

$$\hat{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,m}} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|,$$

где F_{ij} – элемент матрицы $\mathcal{F}$, обратной к $\tilde{\mathcal{E}}$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть параметры модели σ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\det \tilde{\mathcal{E}} \neq 0$;

2) $\bar{\gamma}(\sigma) < \bar{\alpha}(\sigma) - \bar{\beta}(\sigma)$.

Тогда в системе вида (3), определенной моделью σ, существует положение равновесия $p^0 \in P$.

5. Заключение

Полученные теоремы позволяют получить содержательные результаты о существовании положения равновесия в модели типа Аллена, динамика которой описывается разностью отображений двух метрических пространств. В моделях, которые удовлетворяют условиям теоремы, можно использовать различные методы нахождения точки совпадения (см., например, [5]). Развитый математический аппарат может быть приложен к широкому кругу прикладных задач, например, в экономических моделях, в которых положение равновесия совпадает с положением рыночного равновесия, при котором совокупный спрос на товары равен предложению этих товаров.

Литература

1. *Arutyunov A.V., Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications. – 2021. – Vol. 24, № 4. – P. 130–144.
2. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, № 2. – С. 151–155.
3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications. – 2009. – Vol. 5, № 1. – P. 5–16.
4. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in Dynamic Market Models with Known Elasticity // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – № 269. – P. 847–852.
5. *Котюков А.М., Павлова Н.Г.* Алгоритм поиска точек совпадения в сложных системах // Управление большими системами. – 2024. – Вып. 107. – С. 6–27.
6. *Kotyukov A.M., Pavlova N.G.* Equilibrium in Allen Type Dynamic Market Model // Proceedings of the 17th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). Moscow: IEEE, 2024.
7. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55. – № 4. – С. 452–463.