

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА РАЗВИТИЯ ЭПИДЕМИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ УМНОГО ГОРОДА

Ланкин И.С., Богомолов А.С.

Институт проблем точной механики и управления – обособленное структурное подразделение ФГБУНФИЦ «Саратовский научный центр РАН», Саратов, Россия
ivan.lankin@yandex.ru, alexbogomolov@yandex.ru

Фурсов С.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
fursov@ipu.ru

Аннотация. В статье разработана математическая модель для построения цифрового двойника процесса развития эпидемии в одном из регионов Российской Федерации. Приведена постановка задачи, выбраны переменные модели и возмущения, разработана система нелинейных дифференциальных уравнений, позволяющая на заданном временном интервале прогнозировать выход релевантных характеристик развития эпидемии за ожидаемые значения. Полученные результаты могут быть использованы в системах управления умного города, при управлении процессом ликвидации последствий эпидемии в регионах страны, а также в тренажерных и обучающих системах.

Ключевые слова: крупномасштабные системы, эпидемии, цифровой двойник, умный город, математическая модель, дифференциальные уравнения, системная динамика, причинно-следственные связи.

Введение

Одной из основных задач системы управления умного города является прогнозирование эпидемий и уменьшение ущерба от их последствий. В Российской Федерации для решения этой проблемы уже продолжительное время ведутся научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы по формированию единых стандартов, технических и нормативных требований к аппаратно-программному комплексу, выполняющему эту важную функцию.

В настоящее время известно большое количество математических моделей, которые потенциально могут быть использованы при прогнозировании развития эпидемий и предсказания их последствий, в частности модели SIR, SEIR, MSEIR, SEIR-HCD, SuEIR, MSIR, непрерывная SEIR–модель распространения гриппа, модели распространения одной или нескольких волн эпидемии и другие [1–15].

Значительный интерес с точки зрения возможности управления эпидемиологической ситуацией в умном городе представляют эпидемиологические модели с управлением [5, 6, 7]. Так, работе [5] для описания последствий эпидемии используется формальный аппарат мультиагентного моделирования, в основу математического описания эпидемии используется модель SIR:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta IS}{N}, \quad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(R_0 \frac{S}{N} - 1\right) \gamma I, \quad (2)$$

в которой появляются находящиеся на лечении пациенты (Т), а сам процесс эволюции заболевших описывается схемой на рисунке 1:

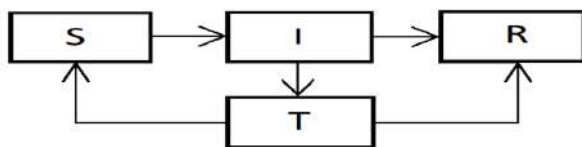


Рис. 1. Структурная схема процесса эволюции заболевших

На рисунке 1 приняты следующие обозначения S(t) – численность восприимчивых индивидов в момент времени t, чел.; I(t) – численность инфицированных индивидов в момент времени t, чел.; R(t) – численность переболевших индивидов в момент времени t, чел.; R₀ – количество одновременно болеющих, чел.; β – коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием; γ – коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов.

В качестве целевого функционала задачи используется выражение (3), в основу которого положено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана [7].

$$J(p, u) = \int_0^T \int_0^1 \left(\sum_{i \in \{S, I, R\}} \frac{r_i}{2} p_i |u_i|^2 + \frac{c}{2} (p_S + p_I + p_R)^2 \right) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 p_I^2(T, x) dx. \quad (3)$$

Первое слагаемое характеризует цену перемещения агентов со скоростью u_i за весь промежуток времени $[0, T]$, второе слагаемое определяет скопление населения, повышающее риск вспышек заболевания и их интенсивного распространения.

Модели распространения одной или нескольких волн эпидемии. Рассмотрим, особенности развития эпидемии коронавируса в Республике Беларусь. Только в этой европейской стране и Швеции не вводились жесткие ограничительные меры, серьезно повлиявшие на характер развития эпидемии [5]. Данные особенности борьбы с эпидемией и преодоления ее последствий представляют значительный интерес с точки зрения проверки на адекватность различных моделей развития эпидемиологических ситуаций.

Беларусь лучше многих стран прошла испытание эпидемией. Хотя ее население несколько больше, чем население Израиля, число инфицированных почти в три раза меньше населения этого государства. Кроме того, в Беларуси очень низкая смертность от коронавируса, гораздо ниже, чем в России и других странах, меньше 1%. (рисунки 2 и 3) [5].

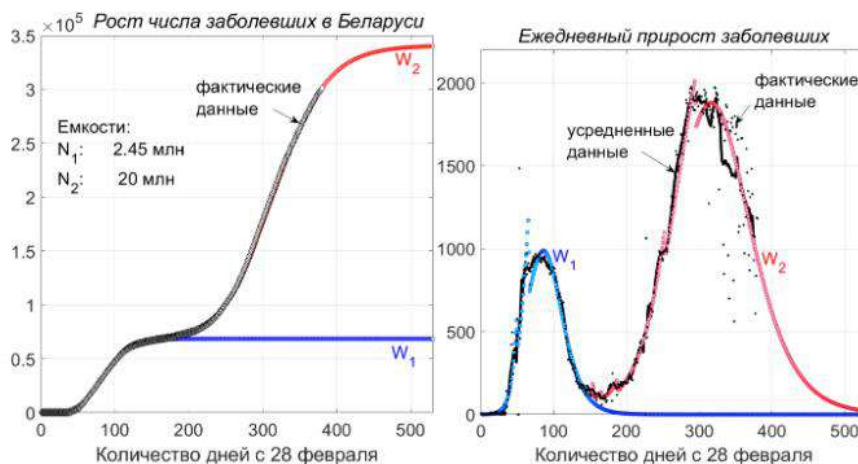


Рис. 2. Динамика распространения эпидемии коронавируса в РБ на временном интервале с 28/02/2020 по 13/03/202

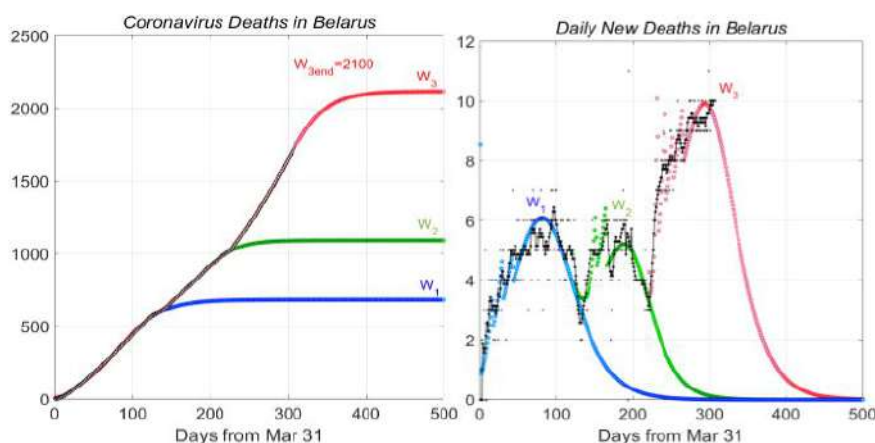


Рис. 3. Динамика изменения числа смертей от коронавируса в РБ на временном интервале с 28/02/2020 по 2/02/2021

Несмотря на значительное количество моделей, характеризующих изменение эпидемиологической ситуации в городских условиях, все они, как правило, в недостаточной степени позволяют учесть влияние значительного числа преимущественно нелинейных обратных связей, существующих между многочисленными характеристиками эпидемии и возмущениями окружающей среды. Кроме того, эти

модели в основном не ориентированы на создание цифровых двойников эпидемии для систем управления умного города.

Все эти обстоятельства делает целесообразным разработку моделей системной динамики для описания цифровых двойников эпидемиологических ситуаций в умном городе, что обуславливает актуальность и практическую значимость темы данного исследования.

1. Постановка задачи

Разработать математическую модель для прогнозирования на временных интервалах различной длины динамики характеристик городской эпидемиологической ситуации; модель должна быть ориентирована на использование при сценарном прогнозировании развития эпидемии в системах управления умного города.

2. Математическая модель

В процессе математического моделирования используются модели системной динамики, хорошо зарекомендовавшие себя при описании функционирования крупномасштабных систем с большим количеством обратных связей [16-28]. Анализ процессов развития эпидемии в крупных городских поселениях и агломерациях показал [1-15], что в качестве релевантных характеристик эпидемиологической ситуации в разрабатываемой модели целесообразно выбрать следующие показатели:

- $L_1(t)$ – летальность (mortality);
- $L_2(t)$ – численность инфицированных (number of infected people);
- $L_3(t)$ – численность цивилизации, т.е. численность населения города или агломерации (the number of civilizations);
- $L_4(t)$ – численность госпитализированных (the number of hospitalized patients);
- $L_5(t)$ – возможность изоляции заболевших (isolation);
- $L_6(t)$ – скорость распространения (propagation speed);
- $L_7(t)$ – доступность лекарства (drug availability);
- $L_8(t)$ – тяжесть симптомов (severity of symptoms);
- $L_9(t)$ – количество умерших от заболевания (the number of deaths from the disease);
- $L_{10}(t)$ – уровень развития медицины (level of medicine);
- $L_{11}(t)$ – длительность инкубационного периода (duration of the incubation period);
- $L_{12}(t)$ – длительность периода полного развития болезни (duration of the period of full development of the disease);
- $L_{13}(t)$ – длительность реабилитационного периода (duration of the rehabilitation period);
- $L_{14}(t)$ – устойчивость вируса к лекарствам (drug resistance of the virus);
- $L_{15}(t)$ – тяжесть осложнений заболевания (the degree of complications of the disease).

В качестве возмущений (внешних факторов) в модели целесообразно использовать следующие показатели:

- $q_1(t)$ – опыт медицинских сотрудников;
- $q_2(t)$ – опыт научных сотрудников;
- $q_3(t)$ – трудоемкость разработки вакцины;
- $q_4(t)$ – степень экономического развития города или агломерации;
- $q_5(t)$ – эффективность мер, предпринятых государством.

Граф причинно-следственных связей между переменными модели $L_i(t), i = \overline{1,15}$ и факторами внешней среды $q_i(t), i = \overline{1,5}$. Формируются локальные подграфы $G_{m_i}, i = \overline{1,15}$, каждый из которых используется при определении соответствующего нелинейного дифференциального уравнения. Матрица инцидентностей графа представляет собой матрицу $A(|L + q|)$ размером 15×20 по числу моделируемых переменных $L_i(t), i = \overline{1,15}$ и возмущений $q_i(t), i = \overline{1,5}$. Значения элементов этой матрицы определяются следующими выражениями: $\forall i \leq 20, \forall j \leq 20 a_{ij} = +1$, если увеличение значения переменной $L_i(t), i = \overline{1,15}$ или фактора внешней среды $q_i(t), i = \overline{1,5}$ приводит к увеличению переменной $L_i(t), i = \overline{1,15}$ или фактора внешней среды $q_i(t), i = \overline{1,5}$. $\forall i \leq 20, \forall j \leq 20 a_{ij} = -1$, если увеличение значения переменной $L_i(t), i = \overline{1,15}$ или фактора внешней среды $q_i(t), i = \overline{1,5}$ приводит к

уменьшению переменной $L_i(t), i = \overline{1,15}$ или фактора внешней среды $q_i(t), i = \overline{1,5}$. При отсутствии связи между указанными переменными и факторами $a_{ij} = 0$.

Матрица инцидентности подграфов причинно-следственных связей, определяющая взаимосвязи между переменными формируемой системы, приведена в таблице 1.

Таблица 1. Причинно-следственные связи между переменными модели и возмущениями

	L1	L2	L3	L4	L5	L6	L7	L8	L9	L10	L11	L12	L13	L14	L15
L1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
L2	0	0	0	0	-1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
L3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
L5	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L6	0	1	1	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L7	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	0	0	0
L8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
L9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
L10	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0
L13	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	-1	0	0	0	0	0
L14	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
L15	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
q1	-1	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	1	0	-1	-1	0	-1
q2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	0
q3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
q4	-1	0	0	1	1	-1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
q5	-1	-1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Обоснование причинно-следственных связей между переменными. Прежде чем перейти к обоснованию наличия или отсутствия причинно-следственных связей между переменными модели необходимо отметить, что ниже будут рассматриваться только релевантные связи с точки зрения научного работника в сфере медицины, т.к. на прогнозирование влияния эпидемии влияет огромное количество событий реального мира. Таким образом, учитываемые ниже связи представляют собой лишь сравнительно небольшое по мощности подмножество множества всех связей, выбранное в соответствии с предпочтениями исследователя.

В качестве примера приведем обоснование причинно-следственных связей между некоторыми переменными модели.

L₁(t) – летальность. Под летальностью L₁(t) понимают показатель медицинской статистики, равный отношению числа умерших от определённого заболевания или иного нарушения здоровья за определённый период времени к общему числу людей, имевших тот же диагноз в рамках того же периода времени. На летальность L₁(t) влияют такие переменные как численность инфицированных L₂(t), так как коэффициент летальности обратно пропорционально зависит от количество подтвержденных случаев заболевания.

L₂(t) – численность инфицированных. Под численностью инфицированных L₂(t) понимают количество подтвержденных случаев заболевания. На численность инфицированных L₂(t) влияет изолированность L₅(t), так как чем больше уровень изоляции населения, тем меньше число инфицированных.

L₃(t) – численность населения города или агломерации. Под численностью L₃(t) понимают общее количество проживающих жителей на определенной территории. На численность влияют такие переменные как летальность L₁(t), так как чем выше летальность, тем ниже численность населения.

L₄(t) – численность госпитализированных. Под численностью госпитализированных L₄(t) понимают общее количество людей, проходящих стационарное лечение. На численность госпитализированных

$L_4(t)$ влияет такая переменная как численность инфицированных $L_2(t)$, так как чем больше людей инфицировано болезнью, тем выше уровень госпитализации.

$L_5(t)$ – изолированность. Под изолированностью $L_5(t)$ понимают уровень ограничительных и режимных противоэпидемических мероприятий, направленных на ограничение контактов инфицированного или подозреваемого в инфицированности лица, животного, груза, товара, транспортного средства, населённого пункта, территории, районов, областей и так далее. На изолированность $L_5(t)$ влияет такая переменная как численность цивилизации $L_3(t)$, так как чем больше численность населения, тем сложнее организовать ограничительные меры.

$L_6(t)$ – скорость распространения. Под скоростью распространения $L_6(t)$ понимают эпидемиологическое понятие, обозначающее количественное инфицированных, отнесенное к определённому периоду времени. На скорость распространения $L_6(t)$ влияет такая переменная, как численность инфицированных $L_2(t)$, которая прямо пропорциональна скорости распространения, так как большее количество больных людей становятся переносчиками болезни.

3. Метод решения

Формирование системы дифференциальных уравнений. При формировании дифференциальных уравнений системной динамики, описывающих изменение переменных модели, первоначально строится граф причинно-следственных связей, каждой вершине которого ставятся в соответствие дифференциальные уравнения в виде выражений

$$\frac{dL_i(t)}{dt} = f_i(\vec{L}, \vec{q}, t), i = \overline{1, n} \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение, характеризующее изменение уровня исследуемых показателей как строки матрицы графа причинно-следственных связей $A(|L + q|)$ в общем виде имеет следующий вид:

$$\frac{dL_i(t)}{dt} = \frac{1}{L_i^*} (B_i(t) - D_i(t)), \quad (5)$$

$B_i(t)$ – результат произведения факторов, влияющих на темп увеличения рассматриваемой переменной, а $D_i(t)$ – результат произведения факторов, влияющих на темп уменьшения данной переменной).

В таблице 2 в качестве примера приведены дифференциальные уравнения, составленные для первых двух переменных модели, а также представлены изображения соответствующих подграфов, характеризующих причинно-следственные связи, влияющие на величину каждой переменной.

Таблица 2. Система уравнений и подграфов для первых двух переменных модели

Переменная модели	Схема подграфа причинно-следственных связей	Дифференциальное уравнение для описания изменения переменной модели
$L_1(t)$ – летальность (mortality)		$\frac{dL_1(t)}{dt} = \frac{1}{L_1^*} \left((q_4(t)) - f_1(L_3(t)) \cdot ((q_1(t)) + (q_2(t)) + (q_4(t)) + (q_5(t))) \right)$
$L_2(t)$ – численность инфицированных (number of infected people)		$\frac{dL_2(t)}{dt} = \frac{1}{L_2^*} \left(f_2(L_1(t)) \cdot f_3(L_4(t)) \cdot f_4(L_6(t)) - f_5(L_7(t)) \cdot ((q_1(t)) + (q_2(t))) \right)$

4. Модельный пример

Решение системы дифференциальных уравнений. При разработке модельного примера использовались усредненные статистические данные, характеризующие развитие эпидемии свиного гриппа в Саратовской области. Моделирование велось на единичном интервале машинного времени, результаты были представлены в виде совокупности лепестковых диаграмм, объединенных в Таблице 3.

Анализ процесса развития эпидемии в Саратове показал, что в качестве возмущений допустимо использовать степенные функции:

$$q_1(t) = \begin{cases} 0.1, \text{ прит} \leq 0.2 \\ 0.4, \text{ прит} > 0.2; \\ 0.6, \text{ прит} > 0.5 \end{cases} \quad (6)$$

$$q_2(t) = \begin{cases} 0.2, \text{ прит} \leq 0.2 \\ 0.4, \text{ прит} > 0.5; \\ 0.6, \text{ прит} > 0.5 \end{cases} \quad (7)$$

$$q_3(t) = 0.5; \quad (8)$$

$$q_4(t) = \begin{cases} 0.7, \text{ прит} \leq 0.3 \\ 0.5, \text{ прит} > 0.6; \\ 0.2, \text{ прит} > 0.8 \end{cases} \quad (9)$$

$$q_5(t) = \begin{cases} 0.5, \text{ прит} \leq 0.3 \\ 0.3, \text{ прит} > 0.6. \\ 0.2, \text{ прит} > 0.8 \end{cases} \quad (10)$$

При начальных условиях {0.05; 0.01; 0.2; 0.7; 0.7; 0.9; 0.05; 0.8; 0.6; 0.8; 0.3; 0.5; 0.2; 0.8; 0.8} решена система нелинейных дифференциальных уравнений, характеризующих изменение релевантных показателей эпидемиологической ситуации во времени.

Решение системы уравнений велось с помощью разработанного для этой цели онлайн калькулятора, использующего библиотеки мультипарадигмального языка Python, численным методом Куна-Таккера.

В Таблице 3 приведены результаты решения задачи, полученные в различные моменты времени и изображенные в виде совокупности полярных диаграмм (синие линии). Красными линиями показаны предельно допустимые с точки зрения контролирующих органов значения величин переменных модели. Выход той или иной релевантной характеристики эпидемиологической ситуации за диапазон, ограниченный красными линиями, означает, что ситуация по этому показателю является недопустимой и требует вмешательства ЛПР.

Таблица 3. Изменение во времени релевантных характеристик эпидемиологической ситуации



Время решения задачи	Величина релевантных характеристик эпидемиологической ситуации
t = 0.25	<p>t0.25</p> <p>Л\ \ t</p> <p>Ряд1 Ряд2</p> <p>1,4 1,2 1 0,8 0,6 0,4 0,2 0 -0,2</p> <p>степень осложнений заболевания устойчивость вируса к лекарствам длительность реабилитационного периода длительность периода полного развития болезни длительность инкубационного периода уровень медицины количество умерших от заболевания тяжесть симптомов</p> <p>летальность численность инфицированных численность цивилизации численность госпитализированных изолированность скорость распространения доступность лекарства</p>
t = 0.5	<p>t0.5</p> <p>Л\ \ t</p> <p>Ряд1 Ряд2</p> <p>2 1,5 1 0,5 0 -0,5</p> <p>степень осложнений заболевания устойчивость вируса к лекарствам длительность реабилитационного периода длительность периода полного развития болезни длительность инкубационного периода уровень медицины количество умерших от заболевания тяжесть симптомов</p> <p>летальность численность инфицированных численность цивилизации численность госпитализированных изолированность скорость распространения доступность лекарства</p>
t = 0.75	<p>t0.75</p> <p>Л\ \ t</p> <p>Ряд1 Ряд2</p> <p>3 2,5 2 1,5 1 0,5 0 -0,5</p> <p>степень осложнений заболевания устойчивость вируса к лекарствам длительность реабилитационного периода длительность периода полного развития болезни длительность инкубационного периода уровень медицины количество умерших от заболевания тяжесть симптомов</p> <p>летальность численность инфицированных численность цивилизации численность госпитализированных изолированность скорость распространения доступность лекарства</p>
t = 1	<p>t1</p> <p>Л\ \ t</p> <p>Ряд1 Ряд2</p> <p>3,5 3 2,5 2 1,5 1 0,5 0 -0,5</p> <p>степень осложнений заболевания устойчивость вируса к лекарствам длительность реабилитационного периода длительность периода полного развития болезни длительность инкубационного периода уровень медицины количество умерших от заболевания тяжесть симптомов</p> <p>летальность численность инфицированных численность цивилизации численность госпитализированных изолированность скорость распространения доступность лекарства</p>

5. Обсуждение результатов

Полученные результаты математического моделирования динамики эпидемиологической ситуации по свиному гриппу показывают, что в момент машинного времени $t = 0$ все релевантные характеристики эпидемии находятся в приемлемом диапазоне.

В момент времени $t = 0.25$ наблюдается незначительный выход за диапазон показателя летальности, что может быть объяснено нахождением на предельно допустимом уровне показателя изолированности, длительности периода полного развития болезни, численности населения и тяжести симптомов.

В момент времени $t = 0.5$ усиливаются негативные тенденции, появившиеся на предыдущем временном интервале: нарастает летальность, еще более увеличивается длительность периода полного развития болезни, а скорость ее распространения впервые с момента наблюдений выходит за допустимое значение.

В момент времени $t = 0.75$ стабилизируется летальность, на пределе находится доступность лекарств, по-прежнему значительна скорость распространения заболевания.

В конечный момент времени $t = 1$ улучшается доступность лекарств, и в целом ситуация стабилизируется.

6. Заключение

Разработанная математическая модель цифрового двойника процесса развития эпидемии может быть использована в информационных системах управления умного города для прогнозирования выхода за допустимые пределы основных релевантных показателей эпидемиологической ситуации.

Литература

1. *Гадзаов А.Ф., Кузьмин В.И., Самохина А.С.* Математические модели динамики эпидемий и их исследование. // Вестник Российского нового университета серия сложные системы: модели. – 2020. – № 3 – С. 39–48.
2. *Акимов В.А., Бедило М.В., Иванова Е.О.* Математические модели эпидемий и пандемий как источников чрезвычайных ситуаций биолого-социального характера. // Civil SecurityTechnology – 2022. – Т. 19, № 3(73) – С. 10–14.
3. *Сёменов В.К., Иванова Н.Б.* Математическая модель эпидемии с произвольным законом восстановления. // Научно-технический вестник информационных технологий, механики, оптики – 2022. – Т. 22, № 1 – С. 179–186.
4. *Елизарова М.В., Котина Е.Д.* Моделирование распространения вирусной инфекции: ВКР // М.В. Елизарова – СПб, 2021 – 39 с.
5. *Куркина Е.С., Кольцова Е.М.* Математическое моделирование и прогнозирование распространения эпидемии коронавируса COVID-19 // Проектирование будущего. Проблемы цифровой реальности: труды 4-й Международной конференции (4-5 февраля 2021 г., Москва). – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2021. – С. 178–192.
6. *Зачкова А.Н.* Разработка программного комплекса для численного решения задач оптимального управления с приложением к эпидемиологии: дис. // А.Н. Зачкова – СПб, 2020. – 28 с.
7. *Кривотько О.И., Кабанихин С.И.* Математические модели распространения COVID-19: дис. // О.И. Кривотько – Новосибирск: НГУ, ИМ СО РАН, 2021. – 65 с.
8. *Леоненко В.Н., Корзин А.И., Даниленко Д.М.* Применение математических моделей динамики заболеваемости эпидемическими ОРВИ для увеличения эффективности эпидемиологического надзора // Математическая биология и биоинформатика. – 2023. – Т. 18, № 2. – С.517–542.
9. *Масленников Б.И.* Алгоритмы и детерминированная компарментная модель в управлении развитием эпидемического процесса: дис. // Б.И. Масленников – Тверь, 2016 – 171 с.
10. *Босаер Н.* Математическая модель возникновения эпидемии коронавируса во Франции: автореф. дис. // Н. Босаер – Париж, 2021. – 7 с.
11. ГОСТ Р 22.0.04-2020. Безопасность в чрезвычайных ситуациях. Биолого-социальные чрезвычайные ситуации. Термины и определения – М. Стандартинформ, 2020 – 15 с.
12. *Акимов В.А., Диденко С. Л., Олтян И.Ю.* Моделирование биолого-социальных чрезвычайных ситуаций с использованием эпидемиологической модели SIR // Технологии гражданской безопасности. – 2020. – № 4 (66). – С. 4–8.
13. *Акимов В.А., Бедило М.В., Суцев С.П.* Исследование чрезвычайных ситуаций природного, техногенного и биолого-социального характера современными научными методами: Монография. – М.: ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ), 2021. – 180 с.

14. *Siettos C.I., Russo L.* Mathematical modeling of infectious disease dynamics // *Virulence*. – 2013. – Vol. 4, № 4. – P. 295–306.
15. *Höhle M., Paul M.* Count data regression charts for the monitoring of surveillance time series // *Comput Stat Data Anal*. – 2008. – Vol. 52. – P. 4357–4368.
16. *Дранко О.И., Резчиков А.Ф., Кушников В.А., Богомолов А.С., Степановская И.А.* Колебательно-волновой подход к системно-динамическому моделированию производственных киберфизических систем // *Информационные технологии и технические средства управления: материалы VIII междунар. науч. конф.* – Москва, 2024. – С. 225–228.
17. *Дранко О.И., Резчиков А.Ф., Кушников В.А., Богомолов А.С., Селютин И.А.* Модель системной динамики для оценки качества ERP-систем // *XIV Всероссийское совещание по проблемам управления: сб. науч. тр.* – Москва, 2024 – С. 3815–3819.
18. *Резчиков А.Ф., Дранко О.И., Богомолов А.С., Кушников В.А., Косицын А.А., Урумбаева Р.Н.* Определение критических комбинаций параметров сложных систем // *Управление развитием крупномасштабных систем: труды Семнадцатой междунар. конф.* – Москва, 2024 – С. 420–425.
19. *Tsvirkun A.D., Rezchikov A.F., Dranko O.I., Kushnikov V.A., Bogomolov A.S.* Optimization and simulation approach to determining critical combinations of company parameters // *Automation and Remote Control – 2024* – Vol. 85, № 10. – P.867–874.
20. *Tsvirkun A.D., Bogomolov A.S., Dranko O.I., Kushnikov V.A., Polyakov M.S., Rezchikov A.F., Stepanovskaya I.A.* System dynamics models for control the road transport system of a mega city // *Automation and Remote Control – 2024* – Vol. 85, № 10. – P.875–886.
21. *Цвиркун А.Д., Богомолов А.С., Дранко О.И., Кушников В.А., Поляков М.С., Резчиков А.Ф., Степановская И.А.* Модели системной динамики для управления дорожно-транспортной системой мегаполиса // *Автоматика и телемеханика*. – 2024. – № 10. – С. 65–79.
22. *Дранко О.И., Резчиков А.Ф., Степановская И.А., Богомолов А.С., Кушников В.А.* Сценарное моделирование развития страны на основе индикативного планирования // *Проблемы управления*. – 2024. – № 5. – С. 25–41.
23. *Резчиков А.Ф., Кушников В.А., Евсеев П.Л., Кабанов И.А.* Задачи и модели оперативного управления компрессорным хозяйством промышленного предприятия // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2004. – № 3. – С.45–50.
24. *Яндыбаева Н.В., Кожанова Е.Р., Кушников В.А.* Разработка программного продукта для определения эффективности деятельности высшего учебного заведения // *Вестник Саратовского государственного технического университета*. – 2014. – Т. 2, № 1 (75). – С. 214–219.
25. *Rezhnikov A.F., Kushnikov V.A., Ivashchenko V.A., Bogomolov A.S., Filimonjuk L., Kachur K.P.* Control of the air transportation system with flight safety as a criterion // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. – 2016. – Vol. 466. – P. 423–432.
26. *Резчиков А.Ф., Кушников В.А., Яндыбаева Н.В., Иващенко В.А., Богомолов А.С., Филимонюк Л.Ю.* Модель для оценки состояния национальной безопасности России на основе теории системной динамики // *Прикладная информатика*. – 2017. – Т. 12, № 2 (68). – С. 106–117.
27. *Rezhnikov A., Dolinina O., Kushnikov V., Ivaschenko V., Kachur K., Bogomolov A., Filimonjuk L.* The problem of a human factor in aviation transport systems // *Indian Journal of Science and Technology* – 2016 – Vol. 9, № 46. – P. 107351.
28. *Хамутова М.В., Кушников В.А.* Математическая модель прогнозирования последствий наводнений // *Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика*. – 2016. – № 3. – С. 109–114.