

АПРОБАЦИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ВЕНЕРЫ

Боронин И.А., Гудкова Т.В.

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук,
Москва, Россия

anarsull23@yandex.ru, gudkova@ifz.ru

Аннотация. Решается задача инверсии параметров внутреннего строения планеты Венера с помощью наблюдаемых или гипотетических геодезических данных. На основе Байесовского подхода к статистике определяются апостериорные распределения вероятностей и оптимальные значения параметров внутреннего строения Венеры при помощи метода Монте-Карло с использованием цепей Маркова.

Ключевые слова: метод Монте-Карло, обратная задача, Байесовская статистика, цепи Маркова, внутреннее строение планет.

Введение

Изучение внутреннего строения планеты Венера сопряжено со значительными затруднениями, связанными как с наличием ограниченного набора данных измерений, так и установленными экстремальными условиями на поверхности. Плотная атмосфера планеты Венера состоит из раскаленного углекислого газа, температура по поверхности составляет порядка 470 °С, давление в 92 раза больше чем на Земле, что не позволяет приборам работать длительное время на поверхности планеты. Плотный облачный слой препятствует наблюдению за поверхностью планеты из космоса.

1. Постановка задачи

Рассматривается сферически симметричная изотропная модель планеты Венера, находящаяся в гидростатическом равновесии. Предполагается, что модель состоит из 3х слоев: жидкое ядро, вязкая мантия и твердая кора. Параметры каждого слоя: радиус, средняя плотность и скорости продольных и поперечных волн. На границе слоев параметры терпят разрыв (меняются скачком), внутри каждого слоя функция зависимости исследуемых параметров от радиуса является либо непрерывной, либо константой. Таким образом, для описания модели планеты Венера необходимо вычислить или задать 12 параметров, зная распределение которых от глубины можно вычислить наблюдаемые параметры планеты, которые представлены в таблице 1 и известны с достаточно высокой точностью.

Таблица 1. Наблюдаемые параметры планеты Венера с учетом погрешности измерений

Показатель	Значение
Средний радиус R , км	$6051,8 \pm 1$
Стандартный гравитационный параметр GM , 10^9 м ³ /с ²	$324858,592 \pm 0,006$
Средний момент инерции I/MR^2	$0,337 \pm 0,024$
Приливное число Лява k_2	$0,295 \pm 0,066$
Средняя плотность ρ_{cp} , кг/м ³	$5242,7 \pm 2,6$

Наблюдаемые параметры планеты Венера являются интегральными показателями, учитывающими внутренне строение планеты целиком. Таким образом, требуется решить обратную задачу, причем в условиях неопределенности связи исследуемых модельных параметров и наблюдаемых показателей, приведенных в таблице 1. Для решения обратной задачи инверсии параметров внутреннего строения планеты Венеры применяется метод Монте-Карло с использованием цепей Маркова (МСМС) [1, 2]. Байесовский подход к статистике позволяет учитывать априорные (исходные) предположения для уточнения апостериорной вероятности (вероятности с учетом новых предположений или информации).

2. Решение обратной задачи методом МСМС

Пусть M – пространство всех моделей планеты Венера, m элемент пространства M . Тогда, согласно байесовскому подходу к статистике, на пространстве M существуют две плотности вероятности: $\rho(m)$ – априорная и $\sigma(m)$ – апостериорная плотность вероятности, которая учитывает, как $\rho(m)$, так и дополнительную информацию:

$$\sigma(m) = k L(m)\rho(m), \quad (1)$$

где k – константа нормирования, $L(m)$ – функция правдоподобия.

Функция правдоподобия отражает степень соответствия модели m определенному набору показателей. В качестве набора показателей для функции правдоподобия выбираются следующие наблюдаемые величины: средняя плотность ρ_{cp} , средний момент инерции и приливное число Лява k_2 , предполагается, что погрешность измерения имеет нормальный вид для всех наблюдаемых величин, тогда функция правдоподобия записывается следующим образом:

$$L(m) = k_1 \exp\left(-\frac{|d_{Mol}^{obs} - d_{Mol}^{cal}(m)|^2}{2\sigma_{Mol}^2} - \frac{|d_{k_2}^{obs} - d_{k_2}^{cal}(m)|^2}{2\sigma_{k_2}^2} - \frac{|d_{\rho}^{obs} - d_{\rho}^{cal}(m)|^2}{2\sigma_{\rho}^2}\right), \quad (2)$$

где k_1 – константа нормирования, d^{obs} наблюдаемые величины, d^{cal} вычисленные величины на основе параметров модели m и σ^2 – дисперсия.

Для применения метода Монте-Карло необходимо описать алгоритм семплирования. В качестве алгоритма семплирования выбирается модифицированный метод случайных блужданий, который заключается в следующем:

- Случайным образом выбирается 1 из параметров модели m_i , который меняется согласно заданному закону распределения и создается модель m_{i+1}
- На основе параметров модели m_{i+1} вычисляются наблюдаемые показатели планеты Венера
- Вычисляется функция правдоподобия для моделей m_i и m_{i+1}
- Новая модель добавляется в цепь Маркова с вероятностью 1, если $L(m_{i+1}) > L(m_i)$, и с вероятностью $L(m_{i+1})/L(m_i)$ в противном случае.

Для получения вероятностных характеристик параметров модели выбирается длина цепи Маркова, и процесс отбора моделей продолжается пока не достигнет выбранной длины, после чего проводится автокорреляционный анализ. Таким образом, полный алгоритм решения задачи методом МСМС можно представить в виде блок-схемы, представленной на рисунке 1.

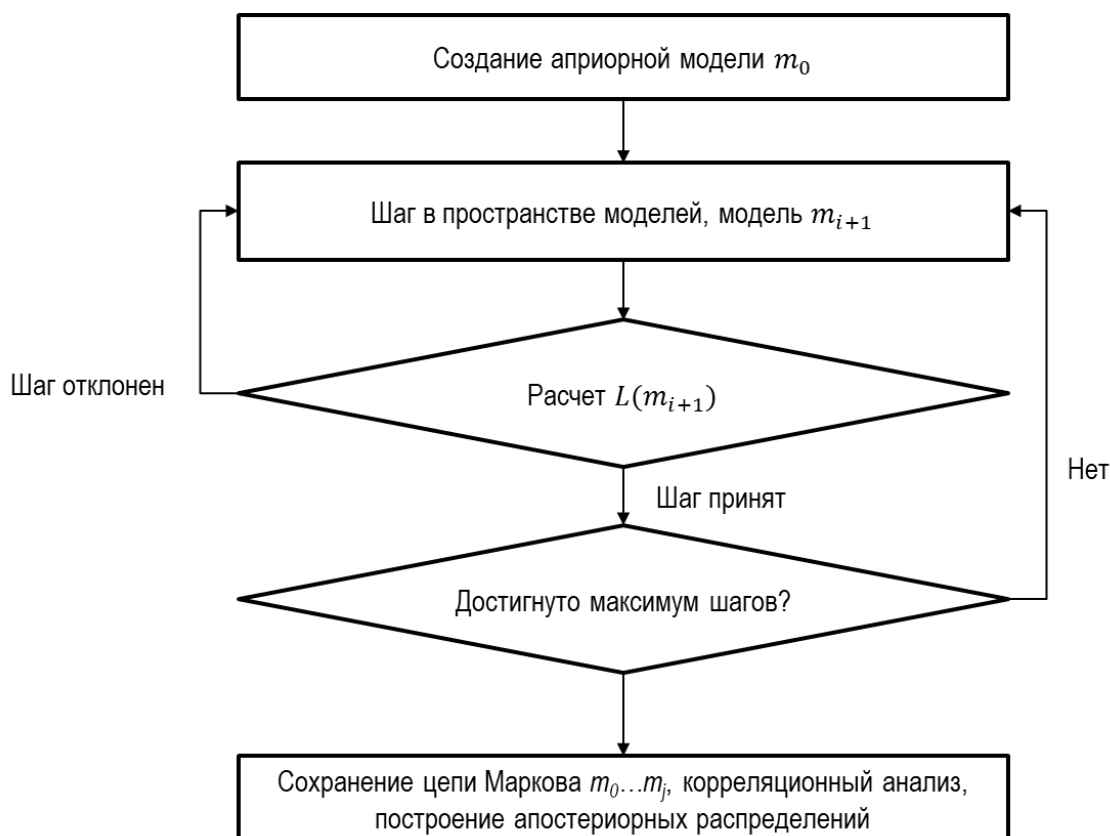


Рис. 1. Алгоритм МСМС

3. Вычисление наблюдаемых величин на основе параметров модели

Для вычисления массы планеты и момента инерции используются формулы (3) и (4), зная радиус и среднюю плотность каждого слоя для модели m :

$$M = \frac{4}{3}\pi(\rho_{\text{я}}r_{\text{я}}^3 + \rho_{\text{ман}}(r_{\text{ман}}^3 - r_{\text{я}}^3) + \rho_{\text{к}}(r_{\text{к}}^3 - r_{\text{ман}}^3)) \quad (3)$$

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{2}{5}\left(\frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{сп}}} + \frac{\rho_{\text{ман}} - \rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{сп}}}\left(\frac{r_{\text{ман}}}{R}\right)^5 + \frac{\rho_{\text{я}} - \rho_{\text{ман}}}{\rho_{\text{сп}}}\left(\frac{r_{\text{я}}}{R}\right)^5\right), \quad (4)$$

где $\rho_{\text{я}}, \rho_{\text{ман}}, \rho_{\text{к}}$ – плотности ядра, мантии и коры планеты, а $r_{\text{я}}, r_{\text{ман}}, r_{\text{к}}$ – радиусы ядра, мантии и коры, $\rho_{\text{сп}}$ – средняя плотность планеты, M – масса планеты, R – радиус планеты Венера.

Вычисление приливных чисел Лява [3] является более сложной задачей. Подробное описание системы уравнений для вычисления приливных чисел Лява представлено в [4] и представляет собой систему из 6 уравнений (5):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{y_1}{r} + \frac{y_2}{\lambda + 2\mu} + \frac{\lambda(n+1)n}{\lambda + 2\mu} \frac{y_5}{r} \\ \dot{y}_2 &= \left(-4\rho_0 g_0 r + \frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+2\mu}\right) \frac{y_1}{r} - \frac{4\mu}{r(\lambda+2\mu)} \frac{y_2}{r} + \left(n(n+1)\rho_0 g_0 r - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)n(n+1)}{\lambda+2\mu}\right) \frac{y_5}{r^2} + \frac{n(n+1)}{r} y_6 - \rho_0 y_4 \\ \dot{y}_3 &= 4\pi G \rho_0 y_1 + y_4 \\ \dot{y}_4 &= -\frac{4\pi G \rho_0 n(n+1)}{r} y_5 + \frac{n(n+1)}{r^2} y_3 - \frac{2}{r} y_4 \\ \dot{y}_5 &= -\frac{y_1}{r} + \frac{y_5}{r} + \frac{y_6}{\mu} \\ \dot{y}_6 &= \left(\rho_0 g_0 - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{(\lambda+2\mu)r}\right) \frac{y_1}{r} - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{y_2}{r} + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} (\lambda(2n^2 + 2n - 1) + 2\mu(n^2 + n - 1)) \frac{y_5}{r^2} - 3 \frac{y_6}{r} - \frac{\rho_0 y_3}{r} \end{aligned} \quad (5)$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе, n – номер вычисляемой гармоники, т.е. $n = 2$, $y_1 \dots y_6$ – переменные, через которые выражаются числа Лява. Система уравнений замыкается 6 граничными условиями [5], из которых 3 граничные условия задаются границе ядро-мантия (6):

$$\begin{cases} y_2 = \rho_{\text{я}}(g_0(r_{\text{я}})y_1 - y_3) \\ y_4 = n \frac{y_3}{r_{\text{я}}} - 4\pi G \rho_{\text{я}} y_1 \\ y_6 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

И 3 граничные условия задаются на поверхности планеты (7):

$$\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_4 + \frac{(n+1)y_3}{R} = 2n + 1 \\ y_6 = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

Система уравнений решается методом Рунге-Кутты 4 порядка. Чтобы удовлетворить граничным условиям на границе ядро-мантия, граничные условия (6) раскладываются по линейно независимому базису из векторов (y_1, y_3, y_5): $(1, \rho_{\text{я}}g_0(r_{\text{я}}), 0, -4\pi G \rho_{\text{я}}, 0, 0)$, $(0, -\rho_{\text{я}}, 1, n/r_{\text{я}}, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$. После чего решается система уравнений (5) используя каждый из векторов как граничное условие. В итоге получается 3 решения, удовлетворяющих граничным условиям (6): $(y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16})$, $(y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{24}, y_{25}, y_{26})$ и $(y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34}, y_{35}, y_{36})$. Затем их линейная комбинация с коэффициентами A, B и C должна удовлетворять граничным условиям на поверхности планеты (7). Тогда число Лява k_2 определяется из уравнения (8):

$$k_2 = Ay_{13} + By_{23} + Cy_{33} - 1, \quad (8)$$

Для численной реализации описанного метода принимаются следующие допущения:

- параметры коры Венеры зафиксированы, поскольку масса коры Венеры составляет 0,5% от массы планеты
- Ядро находится в жидком состоянии, поэтому скорость поперечных волн в ядре равняется 0, а продольных – зафиксирована
- Рассматривается упругая модель планеты Венера, что требует ввести поправку для числа Лява k_2 составляющую 0,03 [6]

Таким образом, из 12 модельных параметров остается 5 и их значения представлены в таблице 2. Априорное распределение параметров принимается равномерным.

Таблица 2. Априорные данные

Показатель	Значение
Радиус ядра $R_{я}$, км	2500-4000
Плотность ядра $\rho_{я}$, кг/м ³	$> \rho_{ман}$ и < 13000
Плотность мантии $\rho_{ман}$, кг/м ³	3300-4600
Скорость продольной волны в мантии V_{ps} , м/с	8000-12000
Скорость поперечной волны в мантии V_{s} , м/с	5000-9000

4. Результаты численного эксперимента

Для построения вероятностных характеристик параметров планеты Венера было создано 5 цепей Маркова длиной 700000 элементов. Согласно [1] первая половина моделей отбрасывается как период пристрелки, затем, после проведения автокорреляционного анализа, было выбрано порядка 3000 моделей.

Результаты численного эксперимента показывают, что распределение среднего Момент инерции, числа Лява k_2 и средней плотности имеют нормальный вид. На рисунке 2 приведены полученные гистограммы распределения.

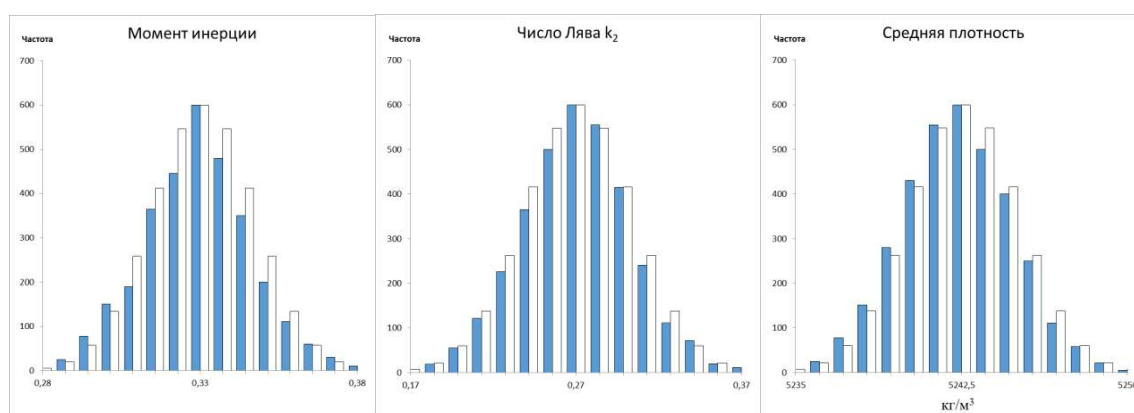


Рис. 2. Гистограммы распределений для среднего момента инерции, средней плотности и числа Лява k_2 на основе моделей планеты Венера. Синим цветом выделены результаты моделирования, а белым нормальные распределения с тем же средним значением и дисперсией

Аналогично, все модельные параметры (рис. 3), кроме плотности ядра, имеют распределения близкие к с нормальным.

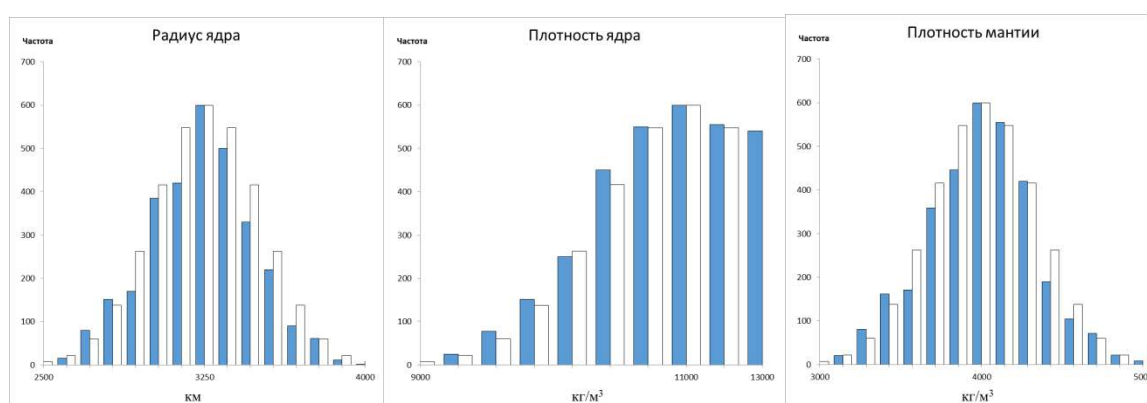


Рис. 3. Гистограммы распределений для радиуса ядра и плотностей ядра и мантии планеты Венера. Синим цветом выделены результаты моделирования, а белым нормальные распределения с тем же средним значением и дисперсией

5. Заключение

Таким образом, в работе проведена апробация метода Монте-Карло для инверсии параметров внутреннего строения Венеры. Построены вероятностные характеристики исследуемых параметров

строения планеты Венера. В работе было принято значительное число допущений, последовательный анализ и снятие некоторых допущений может позволить уточнить параметры планеты Венера.

Литература

1. *Mosegaard K., Tarantola A.* Monte Carlo sampling of solutions to inverse problems // *J. Geophys. Res.* – 1995. – V. 100, № B7. – P. 12431–12447.
2. *Xiao C., Li F., Yan J.-G., Hao W.-F., Harada Y., Ye M., Barriot J.-P.* Inversion of Venus internal structure based on geodetic data // *Research in astronomy and astrophysics.* – 2020. – V. 20 (8). – P.127–141.
3. *Love A.E.H.* The yielding of the earth to disturbing forces // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 82(551):73–88, 1909.
4. *Alterman Z., Jarosch H., and Pekeris C.L.* Oscillations of the earth // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 252 (1268):80–95, 1959.
5. *Молоденский М.С.* Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Земли. М.: Наука, 2001
6. *Гудкова Т.В., Жарков В.Н.* Модели внутреннего строения землеподобной Венеры // *Астрономический вестник. Исследования Солнечной системы.* – 2020. – Т. 54, № 1. – С. 24–32