

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФИНАЛЬНОЙ ТОЧКИ СТАБИЛЬНОГО ПЕРИОДА В BMS-МОДЕЛЯХ ЦЕН НЕФТЕГАЗОВЫХ РЫНКОВ КАК МАРКОВСКОГО МОМЕНТА, НЕ ЗАВИСЯЩЕГО ОТ БУДУЩЕГО

Жолков С.Ю.

РГУ нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина, Москва, Россия

sergei_jolkov@mail.ru

Шашев А.М.

Московский физико-технический институт (МФТИ), Москва, Россия

alex.shashev@mail.ru

Аннотация. Решена задача нахождения момента окончания стабильного периода в BMS-модели со стохастическими переключениями как момента остановки, не зависящего от будущего; найдены необходимые функционалы и критерии определения марковского момента остановки, использующие только данные прошлой динамики цен spot daily Brent. Приводятся необходимые формулы и графики. Решение этой задачи – предварение к решению задачи оптимального планирования.

Ключевые слова: стохастическая теория управления портфелем активов, динамика цен нефтяных рынков, BMS-модели со стохастическими переключениями, адаптивная модель, марковский момент остановки.

Введение

Возможность и предпочтительность (в сравнении с другими моделями) использования BMS-моделей со стохастическими переключениями (BMS-серий) для решения задачи оптимального управления разработкой нефтегазовых месторождений обосновывалась в [1]. Как известно, методы финансовой математики в полном объеме изложены в [2].

Используя информацию о ценах spot daily на каждом стабильном периоде, на которые была предварительно разбита вся известная статистика цен с 1988 г. на сырую нефть марки Brent, которая считается в Европе и России эталонным сортом, удалось создать универсальный алгоритм моделирования оптимальной функции динамики цен и планирования инвестиций с отклонением менее 9% [3] от реальных цен по среднему квадратичному (нормированному по длине интервала N)

относительному отклонению: $qd_{av}(P,S) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\frac{S_t - P_t}{P_t} \right)^2}$ модельных цен S_t от истинных цен P_t . При

этом для построения самой модели использовалась реальная статистика только на 17–18 процентах длины каждого периода (этот интервал называется *базой*).

Однако оставалась нерешенной серьезная проблема: разбиение на стабильные периоды было известно заранее, при этом для нахождения смены каждой из BMS-моделей (на следующую, с другими параметрами) была использована статистика цен из будущего. К настоящему времени трудная задача определения момента окончания стабильного периода как момента остановки, не зависящего от будущего, решена. Основные результаты будут изложены в данной статье.

1. Оценки моментов завершения стабильных периодов

1.1. Определяющие параметры (как индикаторы)

Динамика цены случайного актива $S = (S_t)_{t \geq 0}$ BMS-модели описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dw_t)$. Из формулы стохастического дифференциала Ито [2. §3d; 4. §12.2] следует, что процесс $S_t = S_0 e^{H(t)}$, где $H(t) = ((\mu - \sigma^2)/2)t + \sigma w_t$ – решение уравнения Ито. S_t – вторая, стохастическая компонента «классической» BMS-модели [4, 5]. Над BMS-моделью строится функционал X_t^π , который, в отличие от «классики», интерпретируется как динамика баланса доходов и расходов инвестиционного проекта разработки и эксплуатации месторождения [1].

$(\mu - \sigma^2)/2$ в дальнейшем обозначается через a . $\ln(P_t/P_0) = \hat{H}_t$, где P_t – реальные цены, будет оценкой H_t , и $\hat{h}_n = \hat{H}_n - \hat{H}_{n-1}$ – оценкой $h_n = H(n) - H(n-1)$. Статистические оценки параметров a и σ : $\hat{a}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \hat{h}_k = \bar{h}(n)$, $\hat{\sigma}^2(n) = s^2(n) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n [\hat{h}_k - \bar{h}(n)]^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^n [\hat{h}_k - \bar{h}(n)]^2$. Поведение оценок параметров

характеризуется стабилизацией при увеличении интервала наблюдения за ценами от начала периода (начального интервала) [6].

Векторный критерий определения финальной точки базы на периоде [1] задается вектором (\hat{a}, s) , далее, для (компьютерного) удобства, \hat{a} обозначается как a . Рассмотрим вектор $(a(t), s(t))$ на отрезке $[P_0, P_t]$. Введём функцию $g_l(t)$, где l – ширина этой «оконной» функции: $g_l(t) = \max_{k \in [t-l, t]} z_k - \min_{k \in [t-l, t]} z_k$,

$z(t) = \{a(t), s(t)\}$. Критерием конца базы выбрано выполнение условия: $\frac{g_l(t+1) - g_l(t)}{g_l(t)} < \varepsilon$, где ε –

параметр чувствительности процедуры (уровень отсечения) берется равным 0.005 (арифметические операции покомпонентно).

Кроме разбиения статистики цен Crude Oil spot daily на стабильные периоды, что приводит к BMS-моделям со стохастическими переключениями, следует указать другие подходы к развитию теории BMS-моделей [7–9].

В процессе выбора критерия завершения стабильного периода было проверено множество индикаторов: $\text{ind}(1)$, $\text{ind}(5)$, $a_{15}(t)$, $a_{20}(t)$, $s_{15}(t)$, $s_{20}(t)$, $Sp(a)$, $sp(a)$ и др. Все они приведены в [1] (там же дальнейшие ссылки). Однако все они работали лишь частично – некоторые срабатывали на одних стабильных периодах, некоторые на других. Критерием момента фиксации выбрано выполнение условия: на отрезке $[t, t+30]$ с шагом в 5 точек (то есть на отрезках $[t, t+5k]$, где k – номер шага) вычисляются qd_{av} между лучшей модельной траекторией и реальными ценами, если все $qd_{av} > \eta = 0.2$, то считаем, что точка t является моментом фиксации конца периода.

Т.е. интервал наблюдения, на котором оцениваются отклонения модельных траекторий от графика цен, был равен 30 точкам с пороговым значением $\eta = 0.2$. Для получения статистики по точке конца периода было произведено 50 запусков алгоритма.

По своему определению, оценки параметров вычисляются по реальной статистике цен до момента t , они соответствуют статистическим оценкам параметров a и σ стохастического процесса S_t . И момент фиксации конца периода как первый момент достижения уровня η будет марковским моментом остановки для процесса S_t [10, с. 109–111]. Мы фильтрацией $(F_t)_{t \geq 0}$ считаем σ -алгебру, порожденную процессом S_t до момента t : $F_t = \sigma\{S_u; u \leq t\}$. В точности, финальная точка периода будет моментом остановки относительно (F_{t+30}) – оно и понятно: необходимо время, чтобы убедиться, что произошла перестройка рынка, а не случайная флуктуация.

1.2. Разбиение на стабильные периоды по моментам, не зависящим от будущего

К 2020 г. серия была разбита на 18 периодов стабильности: **1:** 08.07.88–17.07.90 (521); **2:** 18.07.90–[51] 26.09.90 (572); **3:** 27.09.90–[92] 06.02.91 (664); **4:** 07.02.91–[843] 19.05.94 (1507); **5:** 20.05.94–[683] 15.01.97 (2190); **6:** 16.01.97–[490] 10.12.98 (2680); **7:** 11.12.98–[374] 26.05.00 (3054); **8:** 30.05.00–[419] 14.01.02 (3473); **9:** 15.01.02–[1168] 28.07.06 (4641); **10:** 31.07.06–[117] 11.01.07 (4758); **11:** 12.01.07–[397] 31.07.08 (5155); **12:** 01.08.08–[87] 01.12.08 (5242); **13:** 02.12.08–[623] 24.05.11 (5865); **14:** 25.05.11–[840] 12.09.14 (6706); **15:** 15.09.14–[86] 15.01.15 (6792); **16:** 16.01.15–[86] 20.05.15 (6878); **17:** 21.05.15–[200] 02.03.16 (7078); **18:** 03.03.16–[773] 21.03.19 (7851). Здесь [] – количество точек на отрезке, () – номер последней точки [1]. На основе именно этого разбиения были построены адаптивные модели с точностью в 9%.

Алгоритм, определяющий момент остановки стабильного периода, использует две ранее созданные адаптивные модели: динамическую, в которой оценки параметров меняются с увеличением интервала наблюдения за ценами, и модель с фиксированной базой, после которой параметры не меняются. В каждой фиксируется определенное количество оптимальных (минимальных по квадратичному или максимальному отклонениям) траекторий. Если наблюдается свойство: квадратичное отклонение траекторий обеих моделей после момента t более ε наблюдается подряд 20-30 моментов, то t считается потенциальным моментом остановки (концом периода). Статистика по нескольким сотням реализаций моделей определяет наиболее вероятные моменты остановки.

Алгоритм дает (как и должно) вероятностные результаты. Но заметим, и детерминированные методы, использованные для разбиений ранее, также давали различные результаты.

Стохастический алгоритм дал 12 моментов остановки, т.е. разбиение на 12 стабильных периодов. Статистика по 50, 100, 150, 200 и 500 запускам алгоритма дала 3 класса результатов: 4 унимодальных, 4 бимодальных, 4 полимодальных. Далее мы уточним, что это в точности значит.

Примером унимодальной статистики может служить 4-й период (Рис.1, ниже).

Приведём статистику по 50 запускам (Табл.1):

Таблица 1. Частота нахождения точки конца 4-го периода

Номер точки	Количество запусков, где она – конец периода
2660	4
2750	23
2770	6
2820	6

Из таблицы выше видно, что точка 2750 является точкой конца периода в 59% запусков, что значительно больше частот всех остальных точек. В этом смысле статистика унимодальна.



Рис. 1. Частота финальных точек 4-го периода

Для решения вопроса о достаточности 50-и запусков алгоритма для корректного определения границ периода рассмотрим Табл. 2 (здесь учитывались точки, которые выпали менее 3 раз).

Таблица 2. Доля точки завершения 4-го периода

Количество запусков	Точка 2750	Доля 2750
50	23	0.46
75	33	0.44
100	43	0.43

Как видно из таблицы выше, доля выпадения точки 2750 почти неизменна, поэтому 50 запусков алгоритма было достаточно для определения конца периода. Точку 2750 можно считать точкой завершения периода. Она близка к точке 2678 изначального разбиения (отклонение в 2.6%).

Примером бимодальной статистики может служить 10-й период:

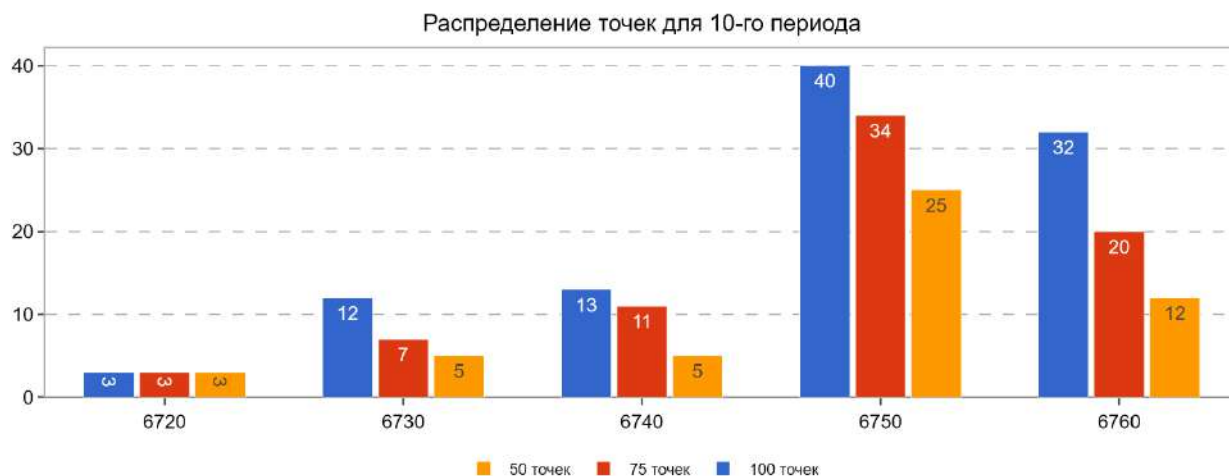


Рис. 2. Частота финальных точек 10-го периода

Приведём статистику по 50 запускам (Табл. 3):

Таблица 3. Частота нахождения точки конца 10-го периода

Номер точки	Количество запусков, где она – конец периода
6730	5
6740	5
6750	25
6760	12

Таким образом, точка 6750 является точкой конца периода в 53% запусков, точка 6760 – в 25.5%, значительно больше частот остальных точек. В этом смысле статистика бимодальна.

Для решения вопроса о достаточности 50-и запусков алгоритма для корректного определения границ периода рассмотрим Табл. 4.

Таблица 4. Доля точки завершения 10-го периода

Количество запусков	Точка 6750	Доля 6750
50	25	0.5
75	34	0.45
100	40	0.41

Как видно из таблицы выше, доля выпадения точки 6750 стабильно больше остальных, поэтому 50 запусков алгоритма было достаточно для определения конца периода. Таким образом, точку 6750 можно считать точкой завершения периода. Этот период содержит сразу две точки: 6706 и 6792 старого разбиения. Алгоритм не смог выявить их обе, поскольку чувствительность в 20% оказалась достаточно грубой настройкой модели.

Примером полимодальной статистики может служить 11-й период:



Рис. 3. Частота финальных точек 11-го периода

Приведём статистику по 50 запускам (Табл. 1):

Таблица 5. Частота нахождения точки конца 11-го периода

Номер точки	Количество запусков, где она – конец периода
6860	10
6870	7
7000	1
7020	1
7080	12
7090	6
7100	8
7110	4
7190	1

На Рис. 3, как и на предыдущих, точки с частотами < 3 исключены.

Здесь несколько претендентов на финальную точку имеют близкие частоты.

Для решения вопроса о достаточности 50-и запусков алгоритма для корректного определения границ периода рассмотрим Табл. 6.

Таблица 6. Доля точки завершения 11-го периода

Количество запусков	Точка 7080	Доля 7080
50	12	0.24
75	17	0.23
100	23	0.23
150	34	0.23

Как можно видеть, доля выпадения точки 7080 остаётся стабильной и составляет около 0.23, поэтому 50 запусков алгоритма можно считать достаточным для определения конца периода в точке 7080. В полученный интервал попадают сразу две точки «старого разбиения»: 6878 и 7078. Вторая точка почти совпадает с 7080.

В соответствии с указанным выше критерием все финальные точки в BMS-серии найдены как моменты остановки, не зависящие от будущего.

2. Заключение

В статье изложены основные моменты решения сложной задачи: вычисление момента окончания стабильного периода как момента остановки, не зависящего от будущего. Эта задача долго не поддавалась решению.

Критерий завершения периода, зависит от интервала $l = 30$ – наблюдений в течение 30 рабочих (торговых) дней, т.е. полутора месяцев календарных дней. Уменьшить этот интервал, по-видимому, невозможно, поскольку за время наблюдений рынок должен определиться, является ли флуктуация случайной или систематической. Критерий использует оптимальные траектории, как адаптивной модели [3], так и модели с вычислением «управляющих параметров» a и σ только на базе периода [1] одновременно. Эти проблемы не были освещены из-за ограничений формата статьи.

Величина интервала l не позволяет найти точку базы и точку фиксирования параметров BMS-модели ближе, чем за 50 точек от начала периода.

Влияние изменения «критериальных» параметров (ϵ, η) на модель и алгоритм требует отдельного исследования.

Построенная модель динамики цен становится [11] с помощью инвестиционной стратегии π и функционала X_t^π частью оптимального инвестиционного проекта.

Литература

1. Жолков С.Ю., Шашев А.М. Об индикаторах дестабилизации тренда цен нефтегазовых рынков в BMS-моделях // Труды XVI междунар. конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2023). – М.: ИПУ РАН, 2023. – С. 859–67.
2. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. В 2 тт. – М.: Фазис, 1998. – 1017 с.
3. Жолков С.Ю. Универсальный алгоритм моделирования всей известной динамики нефтяных цен с отклонением менее 9%. // Тр. Межд. конф. «Теория активных систем-2016» (ТАС-2016). – М.: ИПУ РАН, 2016. – С. 213–17.
4. Merton R.C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates 684–73. November 1973. To be presented at the American Finance Association Meetings, New York, December 1973.
5. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – V. 81, № 3. – P. 637–659.
6. Шашев А.М. Динамика параметров в стохастических BMS-моделях для нефтегазовых рынков // Информационные процессы. – 2022. – Т. 22, № 4. – С. 384–393.
7. Goldentayer L., Klebaner F., Liptser R.S. Tracking Volatility // Problems of Information Transmission. – 2005. – Vol. 41. № 3. – P. 212–229.
8. Pindyck R.S. The Long-Run Evolution of Energy Prices // Energy Journal. – 1999. – Vol. 20. – №2.
9. Christoffersen P., Heston S.L., Jacobs C. The Shape and Term Structure of the Index Option Smirk // June 17, 2009. Research Paper, Center for Research in Econometrics Analysis. – P. 1–43 (<https://ssrn.com/abstract=1447362>).
10. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975. – 319 с.
11. Zholkov (Jolkov) S., Shashev A.M. On Efficient Planning of Oil & Gas Investments and Characteristics of BMS-models Destabilization // 2023 16th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). Moscow, RF. IEEE. Nov., 2023. – P. 1–5.