

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФЕРХЮЛЬСТА-ПЕРЛА В МОДЕЛИРОВАНИИ СЛОЖНЫХ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И ОЦЕНКЕ НАУЧНЫХ ТРЕНДОВ¹

Гатауллин Т.М., Гатауллин С.Т.

Центральный экономико-математический институт РАН, Москва, Россия

gataullin@inbox.ru, sgataullin@cemi-ras.ru

Беспалова Н.В., Плешакова Е.С.

МИРЭА - Российский технологический университет, Москва, Россия

NVBespalova@fa.ru, pleshakova@mirea.ru

Аннотация. В работе представлено математическое утверждение о возможности приближенного описания сложных социально-экономических процессов и процесса развития научной теории уравнением логистического вида. Предлагаемый подход применим при системном анализе тенденций, закономерностей и факторов, негативно влияющих на демографическую ситуацию в России.

Ключевые слова: научная теория, логистическая кривая, уравнение Ферхюльста-Перла, эффект отравления, демография, модель Мальтуса.

Введение

Изучение возможностей применения экономико-математического инструментария в целях повышения эффективности российской экономики в условиях западного санкционного давления продолжает оставаться актуальной задачей для исследователей. В предыдущих работах авторов были рассмотрены возможные синергетические эффекты в теории игр [1], на транспорте [2]. В работе [3] приведено математическое описание синергии и сформулирован принцип достаточности [4]. Вместе с этим, отдельного внимания заслуживает возможность получения синергетических эффектов в контексте больших языковых моделей [5], агент-ориентированного подхода при моделировании сложных социально-экономических процессов [6, 7], применения технологий искусственного интеллекта в приоритетных отраслях цифровой экономики [8-10] и более общий взгляд на синергию и ее проявления [11].

В докладе представлено математическое утверждение о возможности приближенного описания сложных социально-экономических процессов, таких как демография, экономический рост или трансформация эпидемиологического процесса, уравнением логистического вида. Продемонстрировано аналитическое решение на примере распространения научной теории. После обсуждения с экспертным сообществом основных положений предлагаемого подхода, будут определены конкретные кейсы эффективной применимости, включая структуру данных и инструменты вычислительных экспериментов, при системном анализе тенденций, закономерностей и факторов, негативно влияющих на экономическое развитие и рост народонаселения России.

1. Материалы и методы

1.1. Описание научных трендов уравнением логистического типа

Описание этапов развития научной теории приведено в работе [12]. Сделаем следующее предположение о процессе развития научной теории.

Утверждение: такой процесс может быть приближенно описан уравнением логистического вида

$$\frac{dV}{dt} = f(V), \quad (1)$$

где V – объем данной научной теории,

$f(V)$ – некоторая подходящая функция – скорость роста, про которую можно думать, как о скорости роста этого объема.

Уравнение (1) используется при исследовании демографических процессов, тогда в нем вместо V пишут N и это обозначает численность населения. В этом случае часто

$$f(N) = N(r - sN), \quad (2)$$

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта № 075-15-2024-525 от 23.04.2024.

где s, r – некоторые положительные константы, причем $r > sN(0)$, где $N(0)$ есть численность населения в момент (0).

Уравнение (2) еще называют уравнением Ферхюльста-Перла. Отрицательный член в правой части, т.е. $-sN$, описывает так называемый эффект отравления: из-за увеличения численности населения условия жизни ухудшаются, что ведет к замедлению роста численности. Видно, что при небольших N , скорость роста численности населения пропорциональна N , следовательно, население сравнительно быстро растет. Однако при приближении N к отношению $\frac{r}{s}$ снизу функция $f(N)$, а значит и скорость роста численности населения начинает уменьшаться.

Уравнение Ферхюльста-Перла – это уравнение с разделяющимися переменными. Решим его

$$\frac{dN}{(N(r-sN))} = dt; \left(\frac{1}{r}\right) dN\left(\frac{1}{N} - \frac{s}{(r-sN)}\right) = dt; \ln\left(\frac{N}{(r-sN)}\right) = rt + c. \quad (3)$$

где c – постоянная интегрирования. Дальнейшие преобразования и определение константы приводят к решению

$$N(t) = \frac{rN(0)}{(sN(0) + (r-sN(0))\exp(-rt))} \quad (4)$$

График решения рассматриваемого уравнения – хорошо всем известная логистическая кривая.

Применим уравнение Ферхюльста-Перла к описанию развития во времени научной теории и выясним смысл параметров этого уравнения и другие моменты. Итак, возьмем уравнение Ферхюльста-Перла в виде

$$f(V) = V(r - sV), \quad (5)$$

где s, r – некоторые положительные константы, причем $r > sV(0)$, здесь $V(0)$ есть объем рассматриваемой научной теории в моменте 0. Как показано выше, решение этого уравнения есть

$$V(t) = \frac{rV(0)}{(sV(0) + (r-sV(0))\exp(-rt))}. \quad (6)$$

Под объемом $V(t)$ научной теории понимаем весь объем знаний, накопленных данной теорией к моменту t . При этом под знанием понимаются не только знания, которые являются продуктом данной теории (теории, теоремы, закономерности, формулы и.п.), но и связанные с этой научной теорией открытия, изобретения, ноу-хау, полезные модели, опытные образцы, компьютерные программы, микросхемы, конструкторская документация и другие результаты исследований и разработок; технологии, практический опыт, подходы и приемы. Что такое $V(0)$? Как правило, научные теории не отрицают полностью прежние научные теории – новая теория обычно включает старую в качестве предельного случая (как теория относительности включает механику Ньютона как механику при скоростях, много меньших скорости света). Следовательно, $V(0)$ можно считать объемом знаний, накопленных о соответствующей предметной области и подлежащих уточнению средствами новой теории. Из строения функции $V(t)$ и из ее графика видно, что при $t \rightarrow \infty$ функция $V(t)$ асимптотически приближается к константе $\frac{r}{s}$ – к своему предельному объему. Член уравнения (5) с отрицательным знаком, т.е. $-sV$ отражает эффект отравления. В данном случае научная теория в процессе своего развития накапливает с течением времени так много знаний, что исследователям все труднее двигаться вперед. Известно, например, что на начальном этапе развития теории исследователю достаточно проштудировать несколько научных работ по заданной тематике, чтобы выйти на фронт научных исследований. В частности, выполнить такую задачу могут совсем молодые исследователи, например, аспиранты. Если же для выхода на фронт научных исследований нужно проштудировать сотни публикаций (так обстоит дело, например, в физике твердого тела), то это можно сделать за годы научных исследований. Таким образом, константа s ответственна за замедление темпа развития научной теории – чем она больше, тем быстрее теория проходит этап зрелости и вступает в завершающий период своего развития. Константа s отражает также сложность данной научной теории – чем она больше, тем сложнее теория. Например, для понимания механики Ньютона достаточно знать дифференциальное и интегральное исчисления в объеме стандартного вузовского курса, а для работы в квантовой механике надо знать весьма нетривиальные разделы теории вероятностей, теории обобщенных функций, операторной алгебры и т.п. То есть для выхода на фронт научных исследований здесь нужно предварительно изучить эти разделы, в некотором смысле к предметной области исследования непосредственно не относящиеся. Если бы эффекта отравления не было, т.е. если бы $s = 0$, то уравнение (5) приобрело бы вид $f(V) = Vr$, решение которого есть

экспонента $V(t) = V(0)\exp(rt)$, что явно нереально для развития научной теории на сравнительно длительном этапе. Это уравнение представляет собой простейшую модель роста, впервые предложенную Мальтусом в 1789 г. для роста населения Земли. Она приводит действительно к очень быстрому экспоненциальному росту населения с течением времени. Эта модель применима при соответствующих предположениях, например, к развитию научной теории при поддержке государства на каком-то временном промежутке. Константа r показывает, что с ростом накопленного объема знаний в рамках данной теории увеличивается и скорость выработки нового знания, величина этой константы отражает легкость создания нового знания средствами рассматриваемой научной теории – чем она больше, тем быстрее происходит выработка нового знания. Как и в демографических процессах, видно, что при небольшом V скорость роста объема знаний, накопленных данной теорией, пропорциональна V , следовательно, этот объем сравнительно быстро растет. Однако, при приближении V к отношению $\frac{r}{s}$, функция $f(V)$, а значит, и скорость роста объема начинает уменьшаться. На графике функции $V(t)$ отчетливо видны два промежутка: выпуклости функции $V(t)$ с начала до точки t_0 , для которой $V(t_0) = \frac{r}{(2s)}$, и от этой точки t_0 до конца. С начала до точки t_0 скорость роста объема, т.е. $\frac{dV}{dt}$ возрастает, а затем начинает уменьшаться, т.е. точка t_0 – точка максимума производной $\frac{dV}{dt}$ и, значит, $V(t_0) = \frac{r}{(2s)}$. Это можно подкрепить также вычислением второй производной функции $V(t)$ – она и есть $\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{dV}{dt(r-2sV)}$ и равна нулю как раз в точке t_0 , а при $t < t_0$ она отрицательна, что, как известно, характеризует промежутки выпуклости и вогнутости. Промежуток выпуклости вполне можно назвать восходящим трендом развития научной теории, т.к. на нем $V(t+1) - V(t) > V(t) - V(t-1)$, т.е. прирост объема знаний на каждом последующем единичном отрезке больше, чем на предыдущем, а промежуток вогнутости – нисходящим трендом развития научной теории, т.к. на нем $V(t+1) - V(t) < V(t) - V(t-1)$, т.е. прирост объема знаний на каждом последующем единичном отрезке меньше, чем на предыдущем. Как известно, точка, разделяющая промежутки выпуклости и вогнутости называется точкой перегиба, так что в данном случае t_0 есть точка перегиба. Точку t_0 можно найти явно, решив уравнение

$$V(t) = \frac{rV(0)}{(sV(0) + (r - sV(0))e^{-rt})} = \frac{r}{(2s)} \quad (7)$$

и аккуратные выкладки дают

$$t = \frac{(\ln(r - sV(0)) - \ln(sV(0)))}{r}. \quad (8)$$

Для того, чтобы избежать непонимания, примем естественное допущение, что $V(0) < \frac{r}{(2s)}$ – содержательный смысл этого ограничения понятен. Удвоенную величину t_0 , т.е. $2t_0$ естественно назвать длительностью жизни научной теории. Как видно, при прочих равных условиях длительность жизни научной теории тем больше, чем меньше r . Это и понятно, чем меньше r , тем медленнее подходит теория к предельному значению своего объема.

1.2. Объем знаний, число публикаций и число исследователей

Не следует думать, что $\frac{dV}{dt}$ пропорционально числу публикаций по темам данной научной теории или числу исследователей теории. Скорее, и число публикаций и число исследователей пропорционально объему знаний V , накопленных в данной научной теории. Однако с вступлением теории в завершающий этап своего развития в публикациях все меньше и меньше нового знания, все больше повторений, все больше следствий из уже известного и т.д. Возрастает объем так называемого «вторичного» знания: обзоров, реферативных журналов, книг, учебников и т.д. Примерно также, видимо, обстоит дело и с исследователями.

1.3. Научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы (НИОКР)

Объем НИОКР может быть приближенно описан уравнением логистического вида. Так называется уравнения вида

$$\frac{dz}{dt} = f(z), \quad (9)$$

где z – объем НИОКР – количество инноваций, выпускаемый сектором НИОКР в экономику, а $f(z)$ – некоторая подходящая функция – скорость роста, про которую можно думать как о скорости роста этого объема. Например,

$$f(z) = z(r - sz), \quad (10)$$

где r, s – некоторые положительные константы, причем $\frac{r}{s} > z(0)$, а $z(0)$ – объем НИОКР в момент 0. Итак,

$$\frac{dz}{dt} = z(r - sz). \quad (11)$$

1.4. Государство и развитие научной теории

Описанная выше логистическая модель развития научной теории применима лишь к свободному развитию научной мысли. Хорошим примером такого развития является развитие квантовой механики. Однако если интересы общества и государства требуют более быстрого и более интенсивного развития теории, то характер такого развития может быть совершенно отличим от только что описанного. Самым ярким примером здесь является история создания атомной и водородной бомб, или интенсификация исследований лазерной и космической техники и соответствующих теорий.

2. Заключение

Рассмотрим распространение и признание данной научной теории. Обозначим через L число знакомых с данной теорией и разделяющих ее основные положения, назовем таких приверженцами данной теории, а через L_{max} – максимальное возможное число таких людей (например, в случае квантовой механики или подобной теории за L_{max} можно взять общее число специалистов физико-математических направлений). Тогда изменение во времени числа L можно описать уравнением Ферхюльста-Перла

$$\frac{dL}{dt} = aL \left(1 - \frac{L}{L_{max}}\right), \quad (12)$$

где a – некоторая положительная константа. Не будем анализировать это уравнение, а введем новую переменную $x = \frac{L}{L_{max}}$, означающую долю знакомых с данной теорией и разделяющих ее основные положения, т.е. ее приверженцев, и получим новое уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax(1 - x). \quad (13)$$

Это уравнение есть, очевидно, уравнение (2) с $r = s = a$, так что его решение есть

$$x(t) = \frac{x(0)}{(x(0) + (1-x(0)) \exp(-at))}. \quad (14)$$

Некоторые исследователи, однако, считают, что уравнение (12) неадекватно отражает процесс распространения научной теории в обществе. Логика их рассуждений такова: пусть y – опять-таки доля приверженцев новой теории от максимального их числа (т.е. то, что только что обозначено как x). Основное возражение таких исследователей состоит в том, что $\frac{dy}{dt}$ не зависит от y – действительно, если, скажем, каждый приверженец новой теории «вербует» еще двоих, то $\frac{dy}{dt} = 2y$, а вовсе не $\frac{dy}{dt} = 2y$. Более того, кроме процесса вовлечения новых приверженцев теории, дет процесс выбытия разочарованных в новой теории (иногда, впрочем, это нулевой процесс, если новая теория является действительно научной теорией). Следовательно, уравнение, предлагаемое такими исследователями, таково

$$\frac{dy}{dt} = g(1 - y) - hy. \quad (15)$$

где $g > 0$ – коэффициент успешности распространения идей теории, $h > 0$ – коэффициент выбытия (разочаровавшихся в данной теории). Это уравнение с разделяющимися переменными и его решение есть функция

$$y(t) = K + (y(0) - K) \exp(-(g + h)t). \quad (16)$$

где $y(0)$ – доля приверженцев теории в самом начале, а $K = \frac{g}{(g+h)}$ – асимптотическое значение доли числа приверженцев. Вполне возможно, что для некоторых теорий процесс распространения описывается уравнением (15), а для других – уравнением (16).

Литература

1. *Gataullin T.M., Gataullin S.T. and Ivanova K.V.* Synergetic effects in game theory // 2020 13th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). IEEE, 2020.
2. *Gataullin, Timur and Gataullin Sergey.* Management of financial flows on transport // 2019 Twelfth International Conference Management of large-scale system development (MLSD). IEEE, 2019.
3. *Yerznkyan Bagrat H., Gataullin Timur M. and Gataullin Sergey T.* Mathematical aspects of synergy // Montenegrin Journal of Economics. – 2022. – 18.3. – P. 197–207.
4. *Yerznkyan Bagrat, et al.* The sufficiency principle as the ideas quintessence of the club of Rome // Montenegrin Journal of Economics. – 2019. – 15.1. – P. 21–29.
5. *Pleshakova Ekaterina, et al.* Next gen cybersecurity paradigm towards artificial general intelligence: Russian market challenges and future global technological trends // Journal of Computer Virology and Hacking Techniques. – 2024. – P. 1–12.
6. *Makarov V.L., et al.* Problems of Standardizing Agent-Based Model Description and Possible Ways to Solve Them // Herald of the Russian Academy of Sciences. – 2023. – 93.4. – P. 239–248.
7. *Makarov V.L., et al.* Long-term demographic forecasting // Herald of the Russian Academy of Sciences. – 2023. – 93.5. – P. 294–307.
8. *Ivanyuk V.* Forecasting of digital financial crimes in Russia based on machine learning methods // J Comput Virol Hack Tech, 2023.
9. *Boltachev E.* Potential cyber threats of adversarial attacks on autonomous driving models // J Comput Virol Hack Tech, 2023.
10. *Efanov D., Aleksandrov P. & Mironov I.* Comparison of the effectiveness of cepstral coefficients for Russian speech synthesis detection // J Comput Virol Hack Tech, 2023.
11. *Gataullin S.T. and Gataullin T.M.* To the Problem of a Point Source in an Inhomogeneous Medium // Mathematical Notes. – 2023. – 114.5. – P. 1212–1216.
12. *Гатауллин Т.М.* Знание и информация // Искусственные общества. – 2011. – Т. 6, Выпуск 1–4. URL: <https://artsoc.jes.su/s207751800000057-1-1/>.