

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГОРОДСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОГО ПОДХОДА****Ашмарина И.В., Самойлова И.А.***МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

ashmarina.inga@gmail.com, samoilova.irina@inbox.ru

*Аннотация. В работе исследовались методы минимизации негативных последствий парадокса Браесса на основе анализа равновесных потоков с помощью введения различного рода санкций для участников движения. Проводилась верификация результатов на примерах реальных транспортных сетей.*

*Ключевые слова: теория игр, равновесие Нэша-Вардропа, модель Бэкмана, модель стабильной динамики, санкционирование, парадокс Браесса.*

**Введение**

Дорожные заторы возникают не только из-за высокой плотности транспортного потока, но и вследствие индивидуальных решений водителей, каждый из которых, стремясь минимизировать собственные временные затраты, может неосознанно ухудшить общую ситуацию. Данный феномен может быть проанализирован в рамках теоретико-игрового подхода, где выбор стратегий отдельных участников движения определяет состояние всей транспортной системы.

Одной из наиболее популярных моделей распределения транспортных потоков является модель Бэкмана [1]. Было установлено, что поиск равновесия в подобных моделях эквивалентен решению задачи выпуклого программирования. Несмотря на то, что они не могут прогнозировать пробки в транспортной сети, данные модели остаются популярным инструментом в современных программах для моделирования транспортных потоков и практически не имеют альтернатив.

Ю. Нестеров и А. де Пальма в 2003 году представили новую концепцию транспортного равновесия (модель стабильной динамики), способную выявлять пробки [2]. Для модели Нестерова-де Пальма в течение долгого времени не существовало эффективных алгоритмов вычисления; разработка таких алгоритмов и оценка их вычислительной сложности оставались актуальными задачами. В этом направлении значительный вклад внесла исследовательская группа из МФТИ, чьи работы [3-8] стали мощным импульсом для решения данной проблемы.

В 1968 г. немецкий математик Дитрих Браесс привел пример транспортной сети, искусственное ухудшение которой (а именно закрытие дороги) приводит к улучшению транспортного состояния для всех участников дорожного движения в статических равновесных моделях транспортных потоков [9]. Такие дороги стали называть неэффективными. Это явление получило название «парадокс Браесса». Буквально через год неэффективные дороги нашли в Германии, позднее в США и ряде других стран.

В течение долгого времени исследователи, используя модель Бекмана, пытались определить такие неэффективные ребра. Однако в 2006 году Т. Роугарден [10] доказал невозможность существования эффективного алгоритма для их выявления в рамках данной модели. В связи с этим представляется актуальным изучение задачи обнаружения неэффективных ребер в транспортных графах на основе модели Нестерова-де Пальмы.

В данной работе описывается парадокс Браесса, его математическая модель, связь с равновесием Нэша-Вардропа [11, 12]. Для формализации парадокса используется модель стабильной динамики Нестерова-де Пальма. Рассматриваются и сравниваются различные виды санкционирования участников транспортного движения при наличии неэффективных ребер: удаление неэффективных ребер, введение платы за проезд, выделение отдельных полос для автономных транспортных средств.

**1. Описание модели**

**Определения.** Рассмотрим ориентированный транспортный граф  $\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau})$ , в котором каждое ребро  $e \in E$  характеризуется пропускной способностью  $\bar{f}_e$  и минимальными временными издержками  $\bar{\tau}_e$ . В графе выделены два множества вершин – источники  $S$  и стоки  $D$ , которые могут

пересекаться. Пары  $(s, t) \in S \times D$  образуют корреспонденцию. Матрица  $\{d_{i,j}\}$ ,  $i \in S, j \in D$ ,  $d_{i,j} \geq 0$ , есть матрица корреспонденций, она задает совокупные потоки между всеми парами вида «источник-сток». Конфигурацией сети называется дуплет  $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}(f)), \{d_{i,j}\})$ . Пусть ребро  $e$ , представленное в неориентированной форме, инцидентно вершинам  $i$  и  $j$ . Будем говорить, что триплет  $(i, e, j)$  задает локальную ориентацию ребра  $e$ . При этом одна вершина  $i$  определяется как начало ребра  $e$ , другая  $j$  – как его конец. Глобальной ориентацией графа  $\Gamma(V, E)$  называют совокупность локальных ориентаций для всех рёбер сети  $e \in E$ . Рассмотрим  $p = (i_{p_1}, e_{p_1}, i_{p_2}, \dots, e_{p_k}, i_{p_{k+1}})$ ,  $i_j \in V, e_j \in E$  последовательность вершин и ребер графа без повторений и циклов. Такой последовательности соответствует путь  $p$  из начальной вершины  $i_{p_1}$  к конечной  $i_{p_{k+1}}$ . Каждый путь задает свою локальную ориентацию ребер, которые в него входят, которые могут не совпадать с глобальной ориентацией всего графа. Если все ребра пути  $p$  ориентированы в соответствии с глобальной ориентацией, такой путь называется маршрутом. Поток по маршруту  $p$  обозначим через соответствующий параметр  $x_p$ , а  $x = (x_1, \dots, x_{|P|})^T \in X$  – вектор распределения потоков по маршрутам, где  $X = X(\{d_{i,j}\}) = \{x \in R_+^{|P|} : \sum_{p \in P_{st}} x_p = d_{st}\}$  множество допустимых распределений потоков по маршрутам (при заданной конфигурации сети). Загрузка ребра  $e$  при распределении потоков  $x$  вычисляется как сумма всех потоков, проходящих по нему:  $f_e = \sum_p x_p \cdot \delta_{ep}$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ ,  $f = \Theta x$ .

Вес ребра  $e$  при определенном распределении потоков  $x$  обозначим через  $\tau_e(f)$ ,  $C_p(x) = \sum_{e \in p} \tau_e(x) = \sum_{e \in p} \tau_e$ ,  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)^T$  – издержки на маршруте  $p$  при распределении потоков по маршрутам  $x$  с учетом текущего распределения потоков.  $T_{i,j}(\tau) = \min_{p \in P_{i,j}} C_p(\tau)$  – издержки на кратчайшем маршруте из  $i$  в  $j$ .

Равновесное распределение характеризуется выполнением принципа равновесия Нэша-Вардропа, если для любого маршрута  $p \in P_{st}$  выполнено:

$$x_p > 0 \iff C_p(x^{eq}) = \min_{q \in P_{st}} C_p(x^{eq})$$

Ребро  $e$  считается неэффективным, если для любой пары «источник – сток»  $(s, t) \in S \times D$ , такой, что  $\exists p \in P_{st} : x_p^{eq}(\Gamma, \{d_{i,j}\}) > 0$ , выполнено  $\min_{p \in P_{st}} C_p(x^{eq}(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{i,j}\})) \geq \min_{p \in P_{st}} C_p(x^{eq}(\Gamma(V, E \setminus \{e\}, \bar{f}, \bar{\tau}), \{d_{i,j}\}))$  и хотя бы для одной корреспонденции неравенство строгое.

## 2. Равновесие и алгоритмы поиска неэффективных ребер

В модели стабильной динамики, в отличие от классической модели Бекмана, равновесие распределения потоков по маршрутам может быть неоднозначным. Более того, нагрузки на рёбра в разных точках равновесия могут различаться, что усложняет анализ. Поэтому в этой модели равновесие рассматривается как вектор, состоящий из пар значений  $(f^{eq}, \tau^{eq})$ , которые одновременно удовлетворяют балансовым ограничениям на потоки и условию равновесия. Вместо одной весовой функции для каждого ребра вводятся две константы: пропускная способность ребра  $\bar{f}_e$  и время движения по нему в условиях свободного трафика  $\bar{\tau}_e$ . Состояние сети  $(f, \tau)$  называется стабильным, если выполнены определённые условия между нагрузкой и пропускной способностью ребра  $f \leq \bar{f}$  и  $\tau \geq \bar{\tau}$ , а в зависимости от того, меньше или равна ли нагрузка пропускной способности, определяются соответствующие временные издержки (если  $f_e < \bar{f}_e$ , то  $\tau_e = \bar{\tau}_e$ ; если  $f_e = \bar{f}_e$ , то  $\tau_e \geq \bar{\tau}_e$ ).

Допустимое распределение потоков  $x^{so}$ , которое оптимизирует социальные издержки всей системы, называется социальным оптимумом и формулируется через соответствующую задачу оптимизации  $\min \sum_{p \in P} x_p C_p(x)$ ,  $x \in X$ . Определение оптимального подграфа исходной транспортной сети является в общем случае вычислительно сложной задачей, не имеющей эффективного алгоритма решения. Как установлено в литературе [5], идентификация «неэффективных» рёбер имеет смысл при фиксированной матрице корреспонденций. При этом задача минимизации «цены анархии» в модели Нестерова-де Пальмы не обладает конструктивными методами решения.

Альтернативный вопрос: возможно ли эффективно определять неэффективные рёбра для заданной конфигурации? Наивный подход заключается в поочередном удалении каждого ребра с последующим вычислением равновесного распределения и оценкой изменений показателей эффективности. Однако такой метод неэффективен из-за больших вычислительных затрат.

Вопросы существования и единственности транспортного равновесия в модели Нестерова-де Пальмы рассмотрены в специальных исследованиях [7]. В частности, показано [5], что при условии единственности равновесия  $(f^{eq}, \tau^{eq})$  для заданной конфигурации  $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d_{st})$ , выполняется:  $\frac{\partial}{\partial \bar{\tau}_e} \langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle = \gamma^{\Gamma^{eq}, k}(e)$ .

Этот результат служит основой для разработки эвристического алгоритма выявления неэффективных рёбер в парах «источник – сток»:

1. Задать начальное значение параметра  $S = \emptyset$ .
2. Рассчитать равновесное распределение потоков  $(f^{eq}, \tau^{eq})$  для конфигурации сети  $(\Gamma(V, E, \bar{f}, \bar{\tau}), d)$ , установить  $a = \langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle$ .
3. Построить дополняющий путь  $k$  в сети.
4. Определить все ребра  $e \in k$ , удовлетворяющие условию  $\gamma^{\Gamma^{eq}, k}(e) = -1$ . Включить  $e$  в рассматриваемое множество  $A$ .
5. Для всех  $S \subset A$  вычислить соответствующее равновесие  $(f^{eq}, \tau^{eq})$  для  $(\Gamma(V, E \setminus S, \bar{f}, \bar{\tau}), d)$ .
6. Выполнить проверку условия: если  $a \geq \langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle$ , вернуться к шагу 1, иначе обновить параметр  $S = \emptyset$ .
7. Выбрать  $S$  с наименьшим значением  $\langle f^{eq}, \tau^{eq} \rangle$ . Завершить работу алгоритма.

Адаптация данного базового алгоритма для систем с множеством пар «источник – сток» связана с существенными техническими сложностями. Для эффективного решения в таком случае предлагается применение композитного критерия оценки. Усовершенствованный алгоритм по выявлению неэффективных рёбер для многопарных конфигураций состоит из следующих этапов [7]:

1. Решение задачи минимизации общих транспортных издержек:

$$\min_{f, \tau} \left\{ \langle f, \bar{\tau} \rangle \mid f \leq \bar{f}, \sum_{e=(u,v) \in E} f_e - \sum_{(v,u) \in E} f_e = d_v, v \in V, f \geq 0 \right\}$$

(используя специализированные методы на графах или линейные программные решатели).

2. Определение параметров  $T_{si}$ , используя ребра, не задействованные в текущем распределении, в дополняющей сети.
3. Итеративное выполнение следующих действий до окончательного расчёта параметров  $\tau$  для всех элементов:
  - 3.1. Формирование множества активных источников  $S_{ij} = \{s \in S: T_{sj} \text{ и } T_{si} \text{ определены}\}$  для каждого ребра  $(i, j)$ .
  - 3.2. Пересчёт параметров  $\tau_{ij} = \max\{\bar{\tau}_{ij}, \max_{s \in S_{ij}} \{T_{sj} - T_{si}\}\}$ , для которых существует такое  $s$ , что  $T_{sj}$  и  $T_{si}$  известны.
  - 3.3. Обновление параметров  $T_{si}$  с учётом нового известного  $\tau$ .
4. Построение остаточной сети (включая активные ребра с нулевым значением потока) для каждого стока  $s \in S$ . Вычисление  $\hat{\gamma}(e)$ .
5. Объявление всех ребер  $e \in E: \hat{\gamma}(e) < 0$  неэффективными.

### 3. Разрешение парадокса Браесса. Санкционирование участников дорожного движения

Метод 1 – удаление неэффективных ребер.

Алгоритм из предыдущего раздела был реализован в виде программного кода и опубликован на GitHub [13]. В качестве эксперимента рассматривалась транспортная сеть Анахайма ( $n = 416, m = 914, |S| = 34$ ), взятая из популярного набора транспортных сетей [14]. Результаты работы алгоритма продемонстрировали наличие 22 неэффективных ребер (2.4% от общего количества), негативно влияющих на пропускные характеристики системы.

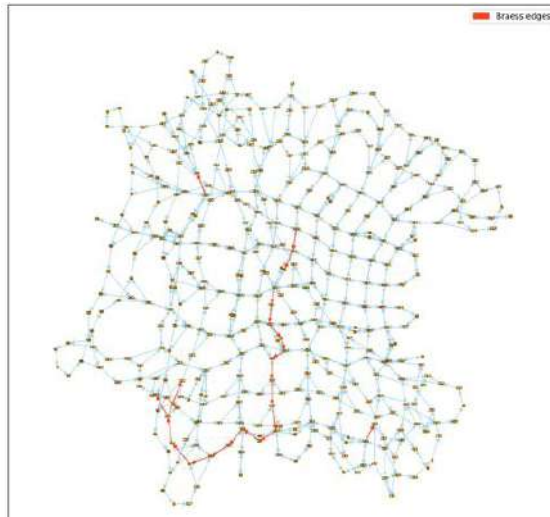


Рис. 1. Численные эксперименты алгоритма на примере города Анахайм

Простое исключение или блокировка неэффективных ребер в транспортной сети не всегда приводит к оптимальному результату, так как это иногда снижает доступность и ухудшает общую связность сети. В связи с этим выделяют второй метод – введение платы за проезд.

Формальное описание задачи установления тарифов состоит в следующем: для заданной конфигурации сети  $(\Gamma(V, E, \tau(\cdot)) \| d_{i,j} \|)$  необходимо определить вектор плат, который обеспечивает равновесное распределение загрузки сети  $(\Gamma'(V, E, \tau(\cdot) + \hat{\tau}) \| d_{i,j} \|)$ , совпадающее с социально оптимальным решением исходной конфигурации.

Интересным является парадокс, проявляющийся в модели Нестерова-де Пальмы: равновесие потоков  $f^{eq}$  совпадает с социальным оптимумом  $f^{so}$ , и допустимый диапазон тарифов задается определённым неравенством. При широком классе условий существует методика введения платы за проезд, гарантирующая достижение социально оптимального состояния транспортной системы:  $0 \leq \hat{\tau} \leq \tau^{eq} - \bar{\tau}$ .

Третий метод предполагает выделение специальных полос для общественного транспорта. Для этого вводятся функции временных затрат, отдельно для общественного и личного транспорта:  $t_{i_a} = \tau_{i_a} + b_{i_a} n_{i_a}$  – время в пути для общественных транспортных средств,  $t_{i_c} = \tau_{i_c} + b_{i_c} n_{i_c}$  – время в пути для личных транспортных средств.  $b_{i_a} = \frac{b_i}{\lambda_i}$ ;  $b_{i_c} = \frac{b_i \chi}{1 - \lambda_i}$ , где  $\chi > 1$ ,  $\chi$  – коэффициент эффективности (неэффективности), а  $\lambda_i \in [0, 1]$  – доля количества выделенных полос.  $TC$  – общее время, затраченное всеми транспортными средствами в сети. Здесь  $\tau_i$  – время движения с максимально возможной скоростью и при отсутствии других транспортных средств на участке дороги  $i$ ,  $b_i$  – обратный коэффициент пропускной способности участка дороги  $i$ , а  $n_i$  – количество транспортных средств на участке дороги  $i$ .

Для наглядности рассматривается простейшая транспортная сеть, состоящая из двух параллельных дорог (рис. 2).

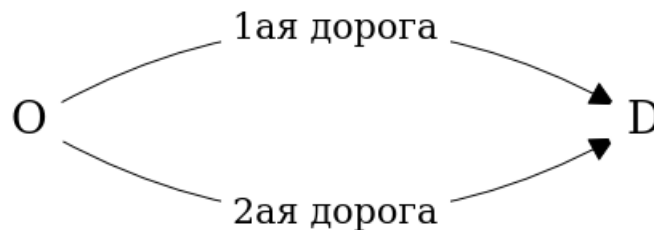


Рис. 2. Классический пример сети из двух дорог. O – источник, D – сток

Обозначим общее количество единиц общественного транспорта как  $m_1 + m_2 = m > 0$ , а количество личных автомобилей как  $n_1 + n_2 = n > 0$ . При этом предполагается, что обе дороги используются, то есть на каждом маршруте существует положительный поток транспортных средств соответствующего типа:  $m_1 + n_1 > 0$  и  $m_2 + n_2 > 0$ .

Оптимальное распределение для общественных транспортных средств – это решение задачи минимизации суммарных временных издержек

$$TC_a^0 = \frac{2md_a + \tau_2 - \tau_1}{2(d_a + b_a)} \tau_1 + b_a \frac{2md_a + \tau_2 - \tau_1}{2(d_a + b_a)} + \frac{2mb_a + \tau_1 - \tau_2}{2(d_a + b_a)} + d_a \frac{2mb_a + \tau_1 - \tau_2}{2(d_a + b_a)}$$

Для оценки общих затрат времени движения по каждому маршруту в пути  $TC$ , предлагается следующий пошаговый алгоритм:

Алгоритм

1. Задать исходные значения параметров  $\lambda$ .
2. Определить социально оптимальное распределение для общественного транспорта, минимизирующее суммарное время в пути  $TC_a$  на множестве  $N_a$  из трёх возможных траекторий (маршрутов).

$$TC_a = (t_a^1 + t_a^2)N_a^1 + (t_a^1 + t_a^4 + t_a^5)N_a^3 + (t_a^3 + t_a^4)N_a^2$$

3. Рассчитать равновесное распределение для личного автотранспорта пользователей. Ввести квант размером  $Q$ , который представляет собой небольшую долю одного транспортного средства.
4. Установить общее количество исполнений квантов  $W \cdot Q$ , образующих очередь квантов.
5. Извлекать поочередно следующий квант из очереди, определять для него оптимальный маршрут и добавлять размер кванта к счётчикам потоков на маршрутах, повторять до опустошения очереди.
6. Рассчитать распределение потоков  $TC_c$  и показатели времени на основе значений счётчиков.
7. Найти точку минимума функции  $TC = TC_a + TC_c$ . Повторять шаги 1–6 для достижения оптимального результата.

Для иллюстрации рассмотрим ситуацию, при которой в сети присутствуют исключительно личные автомобили. В частности, в параметрах сети, описывающей парадокс Браесса [15], увеличим коэффициент  $\lambda$ , отвечающий за выделение полос для общественного транспорта на участке А-В. Анализ зависимости  $TC$  от  $\lambda$ , представленной на графике (рис. 3), демонстрирует, что оптимальное состояние достигается, когда дорога А-В полностью используется для движения общественного транспорта.

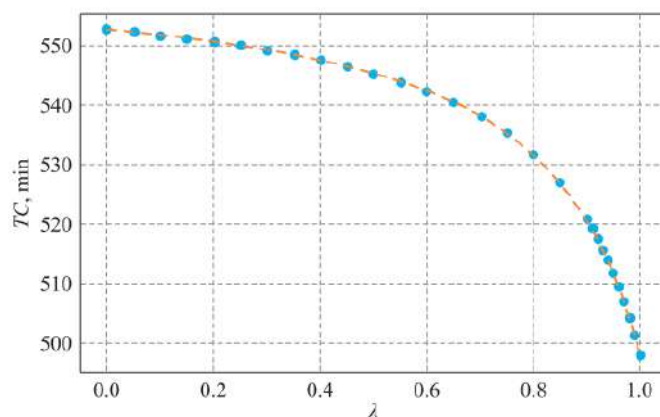


Рис. 3. Соотношение между  $TC$  и графиком  $\lambda$

Рассмотрим распределение транспортных потоков в аналогичной сети и оценим влияние коэффициента эффективности  $\chi$  на оптимальное общее время в пути. При фиксированном параметре  $\lambda$  и увеличении значения коэффициента  $\chi$  получены результаты, схожие алгоритму из работы [15], которые представлены на графике зависимости  $TC(\chi)$ . На представленном графике (рис. 4) прослеживается линейная тенденция, свидетельствующая о том, что личный транспорт не должен присутствовать использовать маршрут 3 и участок дороги А-В для достижения оптимального распределения потоков.

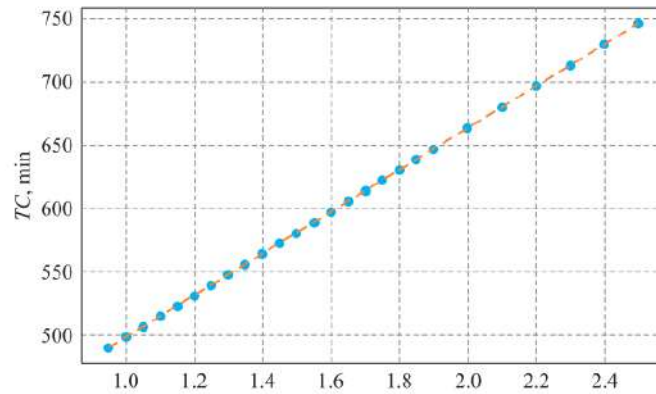


Рис. 4. Связь между  $TC$  и графиком  $\chi$

#### 4. Заключение

Были рассмотрены различные задачи, возникающие при моделировании транспортных сетей с использованием равновесных моделей. Парадокс Браесса демонстрирует фундаментальное противоречие между индивидуальной рациональностью участников и социальной оптимальностью системы. В исследовании проанализированы модель Бекмана и модель стабильной динамики Нестерова-де Пальмы как предельный случай модели Бекмана.

Была изучена задача выявления неэффективных рёбер в транспортном графе в рамках модели стабильной динамики. Для её решения предложен специальный алгоритм, а также сформулированы условия, позволяющие классифицировать ребро как неэффективное. Анализ трёх методов санкционирования – удаления неэффективного ребра, введения платы за проезд и организации выделенных полос – требует применения аппарата теории оптимизации, анализа равновесий Нэша и оценки «цены анархии». Каждый метод может быть интерпретирован как модификация исходной игры, направленная на снижение цены анархии путём трансформации пространства стратегий игроков или их функций выигрыша.

Таким образом, можно сделать вывод, что в малых городах с предсказуемым трафиком эффективнее полностью закрывать некоторые дороги для личного транспорта – это упрощает маршрутизацию и снижает заторы. В мегаполисах с постоянно меняющимся потоком лучше вводить платные участки – гибкая система оплаты помогает адаптироваться к случайным всплескам нагрузки. Выделенные полосы особенно эффективны там, где большая часть пассажиров использует общественный транспорт независимо от задержек или владельцы личных автомобилей готовы менять маршруты при появлении альтернатив.

#### Литература

1. Beckmann M., McGuire B., Winsten C. Studies in the Economics of Transportation. – New Haven, CT: Yale University Press, 1956.
2. de Palma A., Nesterov Yu. Stationary Dynamic Solutions in Congested Transportation Networks: Summary and Perspectives // Networks and Spatial Economics. – 2003. – № 3. – P. 371–395.
3. Гасников А.В., Девуреченский П.Е., Дорн Ю.В., Максимов Ю.В. Численные методы поиска равновесного распределения потоков в модели Бэкмана и в модели стабильной динамики // Математическое моделирование. – 2016. – Т.28, № 10. – С. 40–64.
4. Гасников А.В., Кленов С.Л., Е.А.Нурминский, Холодов Я.А., Шамрай Н.Б. Введение в математическое моделирование транспортных потоков. – М.: МЦНМО, 2013. – 427 с.
5. Дорн Ю.В. Модель Нестерова-де Пальмы и её применение в задачах макроскопического моделирования транспортных потоков: автореф. дис. канд. техн. наук. – М.: МФТИ, 2022. – URL: <https://lib.dm-centre.ru/lib/document/gpntb/ESVODT/789a77140c055bef05c3b25d6a8fed0d/>.
6. Дорн Ю.В. Платные дороги как средство достижения лучшего равновесия Нэша-Вардроп на транспортном графе // Труды 54-й научной конференции МФТИ "Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе". Управление и прикладная математика. Т.1. – М.: МФТИ, 2011. – С. 95–97.
7. Дорн Ю.В., Шитиков О.М. Идентификация парадокса Браесса в модели стабильной динамики // Компьютерные исследования и моделирование. – 2024. – Т. 16, № 1. – С. 35–51.

8. *Dorn Yu.V., Gasnikov A.V., Nesterov Yu.E., Shpirko S.V.* The connection between Beckmann and Stable Dynamics models // VII Moscow International Conference on Optimization Research (ORM2013): Moscow, October 15–19, 2013: Proceedings: Vol. 1. Moscow, 2013. – P.254–256.
9. *Braess D.* Uber ein Paradoxon aus der Verkehrsplanung // Unternehmensforschung. – 1968. – № 12. – P. 258–268.
10. *Roughgarden T.* On the severity of Braess's Paradox: Designing networks for selfish users is hard // J. Computer System Sci. – 2006.–72 (5). – P. 922 – 953.
11. *Nash J.* Non-cooperative games // Annals of Mathematics. – 1951. – V. 54. – P. 286–295.
12. *Wardrop J.* Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research // Proceedings of the Institute of Civil Engineers Part II, 1, 1952. – P.325–378.
13. *Ashmarina I.* Braess-in-tn // 2025. <https://github.com/ingaashmarina/braess-in-tn>.
14. *Stabler B., Bar-Gera H., Sall E.* Transportation networks for research // 2018. <https://github.com/bstabler/TransportationNetworks>.
15. *Steinberg R., Zangwill W.* The Prevalence of Braess's Paradox // Transportation Science. – 1983. – 17. – P. 301–318.