

# О МАКСИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА МНОГООБРАЗИИ

Туницкий Д.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия  
dtunitsky@yahoo.com

*Аннотация.* Работа посвящена невырожденным квазилинейным дифференциальным уравнениям первого порядка на многообразиях. Изучается их глобальная разрешимость в классе геометрических (многозначных) решений. Установлено, что задача Коши имеет единственное наибольшее решение.

*Ключевые слова:* квазилинейные уравнения первого порядка, задача Коши, характеристики Коши, характеристические слоения.

## Введение

Одним из простейших классов дифференциальных уравнений с частными производными являются скалярные квазилинейные уравнения первого порядка

$$\sum_{\alpha=1}^n A^\alpha(x, u) \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} - A(x, u) = 0 \quad (1)$$

с  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , независимыми переменными  $x^1, \dots, x^n$ , одной неизвестной функцией  $u$  и коэффициентами  $A^\alpha$  и  $A$ , заданными в некоторой области  $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Такие уравнения имеют многочисленные приложения к задачам физики, химии, биологии, медицины и пр. Одна из независимых переменных зачастую интерпретируется как время, а моделируемые процессы продолжительны по времени. Оно является невырожденным, если

$$\sum_{\alpha=1}^n (A^\alpha(x, u))^2 \neq 0, \quad (x, u) \in X.$$

Локальная теория уравнений (1), основанная на интегрировании вдоль характеристических направлений и по сути сводящая их к соответствующим системам обыкновенных дифференциальных уравнений, восходит к XVIII веку. Она позволяет успешно строить локальные классические решения таких уравнений. Однако, как известно, при попытке глобального продолжения таких решений возможно возникновение осложнений. А именно, у гладких в начальный момент времени решений за конечное время могут возникать особенности, так называемые градиентные катастрофы, которые при сохранении ограниченности решения приводят к возникновению в нем разрывов. Эта ситуация достаточно типична для классических решений и кардинально отличает их от решений обыкновенных дифференциальных уравнений, которые либо допускают неограниченное продолжение, либо стремятся к бесконечности.

Естественным выходом из описанной ситуации является расширение класса рассматриваемых решений, т.е. дополнение классических решений их обобщениями. Хорошо известны два подхода к обобщению классических решений.

Первый подход, сформировавшийся в середине XX века, связан с идеологией обобщенных функций. Он применим к уравнениям дивергентного вида, которые с помощью интегрирования по частям заменяются интегральными уравнениями, не содержащими производных, и классические решения дополняются разрывными решениями этих уравнений. Второй подход имеет геометрическую природу и связан с идеологией геометрических (многозначных) решений. Он является историческим предшественником первого и восходит к работам Г. Монжа, С. Ли, Э. Картана и др. Его современное изложение можно найти в статье А.М. Виноградова [1], см. также [2], [3] и [4]. Он применим к любым уравнениям вида (1), которые заменяются внешним дифференциальным уравнением

$$\Omega = 0, \quad (2)$$

где  $\Omega$  – соответствующая левой части уравнения (1) дифференциальная  $n$ -форма

$$\Omega = \sum_{\alpha=1}^n A^\alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{\alpha-1} \wedge du \wedge dx^{\alpha+1} \wedge \dots \wedge dx^n - A dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

в области  $X$ . Обоснование перехода от уравнения (1) к внешнему дифференциальному уравнению (2) хорошо известно, см., например, [5] и [6]. При этом роли независимых переменных и неизвестной функции выравниваются и классические решения уравнения (1) дополняются многозначными, т.е. интегральными многообразиями уравнения (2).

Если  $u = u(x^1, \dots, x^n)$  – классическое решение уравнения (1), то его график

$$\sigma: S \ni (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, u(x^1, \dots, x^n)) \in X$$

является интегральным многообразием (многозначным решением) уравнения (2), т.к.

$$\sigma^* \Omega = \left( \sum_{\alpha=1}^n A^\alpha(x, u) \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} - A(x, u) \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Обратное неверно: не всякое многозначное решение является графиком классического.

Переход от уравнения (1) к (2) согласуется с принципом Э. Картана, согласно которому всякую систему дифференциальных уравнений можно свести к системе внешних дифференциальных уравнений, замкнутой относительно внешнего дифференцирования, см. [4; § 42, 79]. Это сведение в сочетании с техникой теории слоений позволяет построить теорию глобальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка на многообразиях. А именно, доказать существование максимального многозначного решения такой задачи, его единственность и полноту.

## 1. Квазилинейные уравнения на многообразиях

По умолчанию все встречающиеся ниже объекты, в частности, многообразия, отображения, расслоения и их сечения, а также слоения предполагаются  $C^\infty$  гладкими.

Рассмотрим хаусдорфово многообразие  $X$  без края размерности  $n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , удовлетворяющее второй аксиоме счетности, и модуль  $\mathcal{E}^n(X)$  дифференциальных  $n$ -форм над кольцом  $C^\infty(X)$ . Пусть на  $X$  задан подмодуль  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^n(X)$ . Предположим, что  $\mathcal{E}$  локально порожден невырожденной  $n$ -формой, т.е. для всякой точки  $x \in X$  найдутся такие окрестность  $U$ ,  $x \in U \subseteq X$ , и  $n$ -форма  $\omega \in \mathcal{E}^n(U)$ , что  $\omega(v) \neq 0$  для  $v \in U$  и  $\mathcal{E}|_U = (\omega)_{C^\infty(U)}$ , где  $(\omega)_{C^\infty(U)}$  – модуль над кольцом  $C^\infty(U)$ , порожденный  $n$ -формой  $\omega$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Квазилинейное уравнение на многообразии  $X$  – это соотношение

$$\mathcal{E} = 0. \quad (3)$$

Его *решением* называется погружение

$$\sigma: S \rightarrow X \quad (4)$$

$n$ -мерного многообразия  $S$ , удовлетворяющее равенству

$$\sigma^* \mathcal{E} = 0.$$

Здесь  $\sigma^*$  – это кодифференциал  $\sigma$ , т.е. линейное отображение, двойственное к дифференциалу  $\sigma_*$ , т.е.  $\sigma^*: \Lambda_{\sigma(s)}^n X \ni \omega \mapsto \omega \circ \sigma_* \in \Lambda_s^n S$  для  $s \in S$  и  $\sigma^*(\Lambda_x^n X) = 0$  для  $x \notin \sigma(S)$ .

Обозначим через  $E(x)$  одномерное подпространство пространства  $n$ -форм  $\Lambda_x^n X$ , порожденное значениями  $n$ -форм из  $\mathcal{E}$  в точке  $x \in X$ ,

$$E(x) = \{\omega(x) \in \Lambda_x^n X \mid \omega \in \mathcal{E}\}. \quad (5)$$

Подпространства  $E(x)$  составляют одномерное векторное подрасслоение

$$E = \bigcup_{x \in X} E(x) \subseteq \Lambda^n X,$$

и сечения этого расслоения составляют модуль  $\mathcal{E}$ , т.е.  $\mathcal{E} = C^\infty(E)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Касательный вектор  $e \in T_x X$  называется *характеристическим* (*характеристикой Коши*) для уравнения (3), если  $e \lrcorner E(x) = 0$ .

Здесь  $\lrcorner$  – внутреннее умножение (свертка) вектора и формы. Последовательность

$$0 \longrightarrow \Lambda_x^{n+1} X \xrightarrow{e \lrcorner} \Lambda_x^n X \xrightarrow{e \lrcorner} \dots \xrightarrow{e \lrcorner} \Lambda_x^1 X \xrightarrow{e \lrcorner} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

точна, и потому вектор  $e \neq 0$  тогда и только тогда является характеристическим, когда

$$e \lrcorner \Lambda_x^{n+1} X = E(x).$$

Поэтому характеристики Коши образуют одномерное подпространство

$$H(x) \subseteq T_x X.$$

Двойственным образом определяются характеристические формы уравнения (3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейная форма  $\omega \in T_x^* X$  называется *характеристической*, если

$$\omega \wedge E(x) = 0.$$

По этому определению характеристические формы образуют подпространство

$$H^*(x) \subseteq T_x^* X,$$

размерности  $n$  в каждой точке  $x \in X$ , и для всякого  $e \in T_x X$  имеем

$$(e \lrcorner \omega) \wedge E(x) = \omega \wedge (e \lrcorner E(x)).$$

Отсюда по определению 3 заключаем, что  $H^*(x)$  аннулируется подпространством  $H(x)$ ,

$$H(x) \lrcorner H^*(x) = 0. \quad (6)$$

Поскольку для всякой линейной формы  $\omega \neq 0$  последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\omega \wedge} \Lambda_x^1 X \xrightarrow{\omega \wedge} \dots \xrightarrow{\omega \wedge} \Lambda_x^n X \xrightarrow{\omega \wedge} \Lambda_x^{n+1} X \longrightarrow 0$$

точна, см. [4; § 17], то форма  $\omega$  тогда и только тогда является характеристической, когда

$$E(x) = \omega \wedge \Lambda_x^{n-1} X.$$

Поэтому, если  $\omega_1, \dots, \omega_n$  – базис линейного пространства  $H^*(x)$ , то

$$E(x) = \bigwedge_{j=1}^n \omega_j \wedge \Lambda_x^{n-1} X,$$

см. [4; § 22 ?! ], и подпространство  $E(x)$  (5) порождается  $n$ -формой  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n$ .

Таким образом, с уравнением (3) ассоциированы *характеристические расслоения*

$$H \subseteq TX, \quad H^* \subseteq T^*X, \quad (7)$$

которые имеют размерности 1 и  $n$  соответственно. При этом справедлива

ЛЕММА 1. Пусть  $\sigma$  (4) – погружение  $n$ -мерного многообразия  $S$  в  $n+1$ -мерное многообразие  $X$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (a)  $\sigma$  является решением уравнения (3),
- (b) для любого  $s \in S$  справедливо равенство  $\dim \ker \sigma^*|_{H^*(\sigma(s))} = 1$ ,
- (c) для любого  $s \in S$  выполняется включение  $H(\sigma(s)) \subseteq \sigma_*(T_s S)$ .

## 2. Характеристики уравнений и решений

По теореме Фробениуса для характеристических расслоений  $H$  и  $H^*$  (7) на многообразии  $X$  существует единственное одномерное слоение  $\mathcal{H}$ , касающееся  $H$  и аннулирующее  $H^*$ , см. [7; гл. II, § 4]. Будем называть  $\mathcal{H}$  *характеристическим слоением уравнения* (3), а его слой, проходящий через точку  $x \in X$ , будем обозначать через  $\mathcal{H}(x)$ ,

$$\mathcal{H}(x) \subseteq X, \quad x \in \mathcal{H}(x), \quad (8)$$

и называть характеристикой уравнения (3).

По лемме 1 характеристические расслоения  $H$  и  $H^*$  (7) уравнения (3) однозначно определяют на решении  $\sigma$  (4) такие подрасслоения

$$h \subseteq TS, \quad h^* \subseteq T^*S \quad (9)$$

размерностей 1 и  $n-1$  соответственно, для которых

$$\sigma_* h = H, \quad h^* = \sigma^* H^*.$$

Будем называть подрасслоения  $h$  и  $h^*$  *характеристическими расслоениями решения  $\sigma$* . Они аннулируют друг друга,  $h \dashv h^* = 0$ , в силу свойства (6) расслоений  $H$  и  $H^*$ .

Как и выше, по теореме Фробениуса для характеристических расслоений  $h$  и  $h^*$  (9) на многообразии  $S$  существует единственное одномерное слоение  $\mathfrak{h}$ , касающееся  $h$  и аннулирующее  $h^*$ . Будем называть  $\mathfrak{h}$  *характеристическим слоением решения  $\sigma$*  (4), а его слой, проходящий через точку  $s \in S$ , будем обозначать через  $\mathfrak{h}(s)$ ,

$$\mathfrak{h}(s) \subseteq S, \quad s \in \mathfrak{h}(s), \quad (10)$$

и называть *характеристикой уравнения* (3). Характеристики  $\mathcal{H}(x)$  уравнения (3) и  $\mathfrak{h}(s)$  решения  $\sigma$  (4) являются инъективными погружениями в многообразия  $X$  и  $S$  соответственно, но не обязательно вложениями, потому что их топологии могут быть тоньше топологий, индуцированных включениями (8) и (10).

### 3. Задача Коши

*Задача Коши* для квазилинейного уравнения (3) задается погружением

$$\sigma_0: S_0 \rightarrow X \quad (11)$$

связного  $(n-1)$ -мерного многообразия  $S_0$ , называемого *начальным погружением* или *начальным значением*. Оно называется *свободным*, если выполнены условия

$$d\sigma_0(T_t S_0) \cap H(\sigma_0(t)) = 0, \quad \sigma_0(S_0) \cap \mathcal{H}(\sigma_0(t)) = \sigma_0(t), \quad t \in S_0.$$

В дальнейшем все начальные значения предполагаются свободными.

Решение  $\sigma$  (4) уравнения (3) будем называть *решением задачи Коши* (11), если  $S$  связно и найдется такое вложение

$$\sigma_1: S_0 \rightarrow S, \quad (12)$$

что

$$\sigma_0 = \sigma \circ \sigma_1. \quad (13)$$

Вложение  $\sigma_1$  будем называть *начальным*. Таким образом, решение задачи Коши (3), (11) – это пара  $(\sigma, \sigma_1)$  из решения  $\sigma$  (4) уравнения (3) и начального вложения  $\sigma_1$  (12), которые связаны равенством (13).

Сузим класс рассматриваемых решений задачи Коши (3), (11).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.** Решение  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) задачи Коши (3), (11) будем называть *определенным*, если для любой точки  $s \in S$  ограничение  $\sigma|_{\mathfrak{h}(s)}$  решения  $\sigma$  на его характеристику  $\mathfrak{h}(s)$  (10) инъективно и пересечение  $\mathfrak{h}(s) \cap \sigma_1(S_0)$  непусто.

В дальнейшем все решения задач Коши предполагаются определенными.

Рассмотрим наряду с  $\sigma_0$  (11) еще одно начальное погружение

$$\tilde{\sigma}_0: \tilde{S}_0 \rightarrow X. \quad (14)$$

Будем называть погружения  $\sigma_0$  и  $\tilde{\sigma}_0$ , а также задаваемые ими начальные значения *эквивалентными* и записывать  $\sigma_0 \sim \tilde{\sigma}_0$ , если найдется такой диффеоморфизм

$$\nu: \tilde{S}_0 \rightarrow S_0, \quad (15)$$

что

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \circ \nu. \quad (16)$$

Очевидно, что введенное отношение « $\sim$ » рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Наряду с решением  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) задачи Коши (3), (11) рассмотрим решение  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$  задачи Коши (3), (14), где  $\tilde{\sigma}$  – погружение

$$\tilde{\sigma}: \tilde{S} \rightarrow X. \quad (17)$$

а  $\tilde{\sigma}_1$  – начальное вложение

$$\tilde{\sigma}_1: \tilde{S}_0 \rightarrow \tilde{S}, \quad \tilde{\sigma}_0 = \tilde{\sigma} \circ \tilde{\sigma}_1. \quad (18)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что решение  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) задачи Коши (3), (11) *не меньше* решения  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$  (18) задачи Коши (3), (14), и записывать  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$ , если найдутся такие вложение

$$\theta: \tilde{S} \rightarrow S \quad (19)$$

и диффеоморфизм  $\nu$  (15), для которых выполняются равенства (16) и

$$\sigma \circ \theta = \tilde{\sigma}, \quad \theta \circ \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 \circ \nu.$$

Если при этом вложение  $\theta$  (19) является диффеоморфизмом, то будем говорить, что  $(\sigma, \sigma_1)$  *равно*  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ , и записывать  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) = (\sigma, \sigma_1)$ .

Для отношения « $\leq$ » справедлив следующий критерий сравнимости.

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) и  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$  (18) – определенные решения задач Коши (3), (11) и (14). Для того, чтобы  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$ , необходимо и достаточно, чтобы начальные значения (11) и (14) были эквивалентны, т.е. существовал такой диффеоморфизм  $\nu$  (15), что справедливо равенство (16), и выполнялись включения

$$\tilde{\sigma}(\tilde{h}(\tilde{\sigma}_1(\tilde{t}))) \subseteq \sigma(h(\sigma_1 \circ \nu(\tilde{t}))), \quad \tilde{t} \in \tilde{S}_0.$$

Из теоремы 1 вытекает

ТЕОРЕМА 2. Для определенных решений  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) и  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$  (17), (18) задач Коши (3), (11) и (3), (14) следующие утверждения эквивалентны.

(a) Справедливо равенство  $(\sigma, \sigma_1) = (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ .

(b) Справедливы неравенства  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$  и  $(\sigma, \sigma_1) \leq (\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$ .

(c) Существует удовлетворяющий равенствам (16) диффеоморфизм  $\nu$  (15) (т.е. начальные значения (11) и (14) эквивалентны), для которого справедливы соотношения

$$\tilde{\sigma}(\tilde{h}(\tilde{\sigma}_1(\tilde{t}))) = \sigma(h(\sigma_1(\nu(\tilde{t})))), \quad \tilde{t} \in \tilde{S}_0.$$

Из теоремы 2 следует, что на множестве классов эквивалентности определенных решений задачи Коши (3), (11) относительно « $=$ » отношение « $\leq$ » антисимметрично и задает структуру частично упорядоченного множества, т.е. является отношением порядка.

#### 4. Полные и максимальные решения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Решение  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) задачи Коши (3), (11) будем называть *полным*, если  $\sigma(h(s)) = \mathcal{H}(\sigma(s))$  для любой точки  $s \in S$ .

Пусть все характеристики уравнения (3) односвязны. Имеет место следующий результат.

ТЕОРЕМА 3. Задача Коши (3), (11) имеет полное решение.

Среди всех решений  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) задачи Коши (3), (11) особый интерес представляют решения, максимальные и наибольшие по отношению предпорядка « $\leq$ ».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Решение  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) задачи Коши (3), (11) будем называть *максимальным*, если  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1) \leq (\sigma, \sigma_1)$  для всякого сравнимого с ним решения  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$  (18) задачи Коши (3), (14).

Из теорем 1 и 3 вытекает

ТЕОРЕМА 4. Для решения  $(\sigma, \sigma_1)$  (4), (12) задачи Коши (3), (11) следующие утверждения эквивалентны.

(a) Решение  $(\sigma, \sigma_1)$  является максимальным.

(b) Решение  $(\sigma, \sigma_1)$  является наибольшим среди решений задач Коши с эквивалентными начальными значениями.

(c) Решение  $(\sigma, \sigma_1)$  является полным.

Из теорем 1, 3 и 4 следует

ТЕОРЕМА 5. Задача Коши (3), (11) имеет максимальное решение  $(\sigma, \sigma_1)$ . При этом максимальные решения  $(\sigma, \sigma_1)$  и  $(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}_1)$  задач Коши (3), (11) и (3), (14) тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны принимаемые ими начальные условия (11) и (14).

## 5. Заключение

Таким образом, установлено, что задача Коши для широкого класса невырожденных квазилинейных уравнений на многообразии имеет максимальное решение, которое обладает свойством полноты и единственно с точностью до эквивалентности.

Следует отметить, что все установленные результаты справедливы для любых гладких хаусдорфовых многообразий, удовлетворяющих второй аксиоме счетности. Никаких дополнительных требований ни на топологию этих многообразий, ни на наличие на них какой-либо меры при этом не накладывалось.

## Литература

1. *Виноградов А.М.* Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. – 1973. – Т. 210, № 1. – С. 11–14.
2. *Лычагин В.В.* Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. – 1979. – Т. 34 (205), № 1. – С. 137–165.
3. *Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V.* Contact geometry and nonlinear differential equations. – Encyclopedia Math. Appl., vol. 101. – Cambridge Univ. Press – Cambridge, 2006. – 496 с.
4. *Cartan É.* Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. – Actualités Sci. Ind., vol. 994. – Hermann et Cie. – Paris 1945. – 214 с.
5. *Тунитский Д.В.* О глобальной разрешимости квазилинейных уравнений // Труды 17-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2024). – М.: ИПУ РАН, 2024. – С. 551–556.
6. *Tunitsky D.V.* On the Existence and Uniqueness of Global Solutions of Quasilinear Equations // Proceedings of the 17th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD). – IEEE Explore Digital Library, 2024. – P. 1–5. – <https://ieeexplore.ieee.org/document/10739635>
7. *Camacho C., Neto A.L.* Geometric Theory of Foliations. – Birkhäuser, Boston, 1985. – 205 с.