

УПРАВЛЕНИЕ НА СКОЛЬЗЯЩИХ РЕЖИМАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ ВЕРТОЛЕТА В РЕЖИМЕ ЗАВИСАНИЯ¹

Ткачева О.С., Уткин А.В.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

Tkolga17@gmail.com

Виноградова М.С.

МГТУ им Н.Э.Баумана, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается плоское движение вертолета в вертикальной плоскости. В качестве управлений выбраны скорость изменения тяги несущего винта и скорость изменения угла перекоса несущего винта. В работе построен закон стабилизации на основе скользящих режимов с учетом фиксированного положения центра масс вертолета в режиме зависания.

Ключевые слова: математическая модель вертолета, плоское движение, нулевая динамика, скользящие режим.

Введение

В последнее время распространение получили беспилотные летательные аппараты (БПЛА), которые контролируются и управляются пилотами на земле с помощью телеметрии. Пилоты могут находиться как поблизости, так и на большом расстоянии (в зависимости от задачи). Изначально разработки ограничивались большими военными дронами, однако достижения в области двигателей, приводной электроники, микроконтроллеров и доступа к GPS-навигации побудили производителей разрабатывать более компактные и дешёвые дроны [1, 2].

Исследования беспилотных летательных аппаратов (БАС) значительно возросли за последние годы. В настоящее время растёт интерес к использованию БАС в различных приложениях, таких как аэрофотосъёмка, инспекция и мониторинг, точные измерения, поисково-спасательные работы или управление в случае стихийных бедствий, и это лишь некоторые из них. Среди различных доступных платформ, вертолеты и другие роторные летательные аппараты с возможностью зависания и вертикального взлёта, и посадки широко используются в воздушной робототехнике [2]. Осветим текущую ситуацию с различными подходами к моделированию различными БПЛА.

Интересный подход к моделированию и управлению БПЛА содержится в работе [3]. В статье идет речь о разработке робота с взмахами крыльев, похожего на птицу, с сервоприводом под названием USTBird-I и его применении для автономной воздушной доставки. Было показано, что бионическая конструкция может значительно улучшить характеристики планирования робота, что полезно для выполнения миссии по высадке с воздуха.

В [4] предложен новый трекинг-контроллер на основе кватернионов для квадрокоптера с недостаточной активностью, основанный на методе псевдолинейной линеаризации с обратной связью. Модель квадрокоптера полностью аналогична модели из [5], полученной с помощью уравнений Ньютона и Эйлера. Предложенный контроллер был сравнен с тремя современными контроллерами квадрокоптеров, в том числе и контроллером из [4]. Результаты моделирования показали, что предложенная модель более эффективна и производительна, чем другие.

В [6] представлен обзор популярных стратегий управления квадрокоптерами, таких как интеллектуальные методы ПИД-регулирования, методы линеаризации обратной связи, методы линейного квадратичного LQR-регулирования, методы управления в режиме скользящего режима и методы обратного шага, а также анализ преимуществ и недостатков каждого метода управления. Также обсуждается адаптация каждого метода нелинейного управления на основе наблюдателя. Приведем основные выводы данной работы. Наиболее эффективный алгоритм управления для квадрокоптеров должен соответствовать реальным требованиям к конструкции, чтобы обеспечить наилучшие характеристики управления. Исследование алгоритмов управления для квадрокоптеров должно проводиться с учётом следующих основных факторов: контроллеры на основе алгоритмов должны обладать хорошей динамической характеристикой; неопределённость параметров модели и сопротивление воздуха. На установившемся режиме работы не должны влиять шумовые помехи и другие неопределённости. Кроме того, конструкция контроллера должна быть максимально простой и удобной в реализации. Практика показала, что один алгоритм управления полётом больше не может

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского Научного Фонда, проект №25-29-00412. <https://rscf.ru/project/25-29-00412/>

соответствовать всем требованиям, предъявляемым к контроллеру с хорошей производительностью. Совместное использование нескольких алгоритмов – это перспективное направление, но его сложность не позволяет обеспечить надёжность и отказоустойчивость системы управления. Сложность использования контроллера полёта заключается в том, чтобы найти компромисс между динамическими характеристиками, поведением в установившемся режиме и сложностью контроллера.

В [7] предлагается новый контроллер на основе наблюдателя для беспилотного летательного аппарата (БПЛА) с вертикальным взлётом и посадкой (VTOL). Основным преимуществом этого подхода является его применимость в условиях, когда система глобального позиционирования (GPS) недоступна. Предлагаемый наблюдатель для БПЛА делает предлагаемую конструкцию наблюдателя более эффективной с точки зрения вычислений, поскольку устраняет необходимость в реконструкции ориентации и местоположения. Хотя предлагаемый подход описан в непрерывной форме, в работе представлена и протестирована дискретная версия.

В [8] предлагается стратегия прогнозного управления (MPC) для отслеживания траектории квадрокоптера на основе компактной модели пространства состояний, основанной на квазилинейном представлении с изменяющимися параметрами (qLPV) нелинейного квадрокоптера. Использование представления qLPV позволяет ускорить выполнение, что может быть полезно для приложений в реальном времени и для решения задач оптимизации с помощью квадратичного программирования (QP).

Так же представляет интерес управление БПЛА с помощью адаптивного управления. В [9] рассматривается разработка адаптивной системы управления на основе нейронной сети с фиксированным временем для нового коаксиального трансдоменного гибридного воздушно-подводного транспортного средства (HAUV). Для решения проблем, связанных с динамической нелинейностью, колебаниями параметров модели и множественными внешними возмущениями при коаксиальном движении HAUV в среде, предлагается схема адаптивного управления скользящим режимом с фиксированным временем (AFTSMC) на основе аппроксимации нейронной сетью с радиальными базисными функциями (RBFNN). Описанный выше подход быть частично продолжен и развит в [10]. В этой работе рассматриваются проблемы сингулярного моделирования и управления траекторией в разных доменах для особого класса соосных гибридных воздушно-подводных аппаратов (HAUV). Соосным HAUV необходимо эффективно преодолевать влияние гидродинамических факторов при движении под водой, поэтому угол поворота, необходимый для соосных HAUV, намного больше, чем в воздухе. Для устранения присущей моделированию углов Эйлера сингулярности используется представление угла поворота на основе моделирования кватернионов.

Также, можно рассматривать методы управления, предложенные в [11]. В данной работе рассматривается задача оптимального регулирования выходных параметров для нелинейных систем с жёсткой обратной связью в непрерывном времени, в которых полные состояния не могут быть измерены в реальном времени, а априорные знания о динамике системы и допустимой политике управления недоступны. Для решения задачи разрабатываются и одновременно применяются адаптивный наблюдатель и адаптивный решатель для отслеживания состояний, оценки неопределённых параметров и решения нелинейных уравнений регулятора

В этой работе мы рассматриваем управление вертолетом с помощью совмещения двух классических подходов: линеаризацию нулевой динамики для нахождения виртуальных выходов с асимптотически устойчивой нулевой динамикой для системы [12, 13] и управление на скользящих режимах [14].

1. Математическая модель вертолета

Мы будем использовать достаточно простую модель вертолета, однако она достаточно точно описывает режим висения [15, 16]. В работе рассматривается движение вертолета в вертикальной плоскости XOY [16]. В работе рассматривается плоское движение вертолета в вертикальной плоскости. В качестве управлений выбраны скорость изменения тяги несущего винта и скорость изменения угла перекоса несущего винта.

Предполагается, что вертолет перемещается с достаточно малыми линейными и угловыми скоростями в окрестности стабилизируемого положения, поэтому влиянием сил и моментов аэродинамического сопротивления можно пренебречь.

Расчетная схема вертолета приведена на рис 1.

В данном случае, XOY – неподвижная земная система координат. В центре масс вертолета расположен центр подвижной системы координат X_bOY_b , а ось X_b направлена в сторону кабины параллельно плоскости несущего винта при отсутствии перекоса.

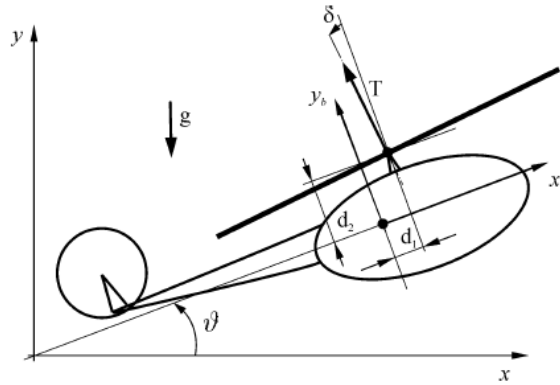


Рис. 1. Схема вертолета в координатных осях

Модель вертолета в режиме висения представлена следующей системой:

$$\begin{cases} M\ddot{x} = -T \sin(\vartheta + \delta), \\ M\ddot{y} = T \cos(\vartheta + \delta) - Mg, \\ J\ddot{\vartheta} = Td_1 \cos \delta + Td_2 \sin \delta, \\ \dot{T} = w_1, \\ \dot{\delta} = w_2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь M – масса вертолета, J – момент инерции относительно центра масс, T – величина тяги несущего винта, δ – угол перекоса несущего винта, ϑ – угол между продольной осью вертолета и осью Ox земной системы координат, а величины d_1, d_2 определяют смещение точки вращения несущего винта относительно центра масс при изменении угла перекоса. Предполагается, что $T > 0$. Перемещения рассматриваются в окрестности заданной точки с малыми линейными и угловыми скоростями, таким образом сопротивлением воздуха в модели можно пренебречь.

В качестве управлений в системе в системе взяты скорость изменения величины тяги несущего винта w_1 и скорость изменения угла перекоса w_2 .

2. Приведение к нормальной форме и выбор управления

Для приведения к нормальной форме [13] системы (1) выпишем одно из положений равновесия:

$$\begin{aligned} x = x^0, \dot{x} &= 0, y = y^0, \dot{y} = 0, \\ \vartheta &= \vartheta_0, \dot{\vartheta} = 0, \\ T &= Mg, \delta = \delta_0 = -\vartheta_0, \\ w_1 &= 0, w_2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Следующая замена переменных переводит положения равновесия (2) в нулевое положение равновесия [13, 16]:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - x^0, & x_2 &= \dot{x}, \\ x_3 &= y - y^0, & x_4 &= \dot{y}, \\ x_5 &= \vartheta - \vartheta_0, & x_6 &= \dot{\vartheta}, \\ x_7 &= \frac{T}{Mg} - 1, & x_8 &= \delta - \delta_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{w_1}{Mg}, u_2 = w_2, \\ p_1 &= M \frac{d_1}{J}, p_2 = M \frac{d_2}{J}. \end{aligned}$$

Тогда с учетом сделанных обозначений система (1) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8), \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) - g, \\ \dot{x}_5 = x_6, \\ \dot{x}_6 = (x_7 + 1)g(p_1 \cos(x_8 + \delta_0) + p_2 \sin(x_8 + \delta_0)), \\ \dot{x}_7 = u_1, \\ \dot{x}_8 = u_2. \end{array} \right. \quad (4)$$

Заметим, что $p_1 \cos(\delta_0) + p_2 \sin(\delta_0) = 0$ при $\delta_0 = -\text{arctg}(d_1/d_2)$. Следовательно, одним из положений равновесия системы (4) является нулевое положение.

Размерность входа системы (4) равно двум. Тогда, выберем два виртуальных выхода – $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$. Необходимо стабилизировать нулевые значение выбранных виртуальных выходов [13, 15].

Для удобства преобразования к нормальной форме введем еще одну локальную замену переменных:

$$\begin{aligned} z_1^1 &= x_1, & z_2^1 &= x_2, \\ z_3^1 &= -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8), & z_1^2 &= x_3, \\ z_2^2 &= x_4, & z_3^2 &= (x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) - g, \\ \eta_1 &= x_5, & \eta_2 &= x_6. \end{aligned} \quad (5)$$

Нормальная форма, соответствующая выходам $y_1 = z_1^1, y_2 = z_1^2$, со «смешанными» переменными имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^1 &= z_2^1, \\ \dot{z}_2^1 &= z_3^1, \\ \dot{z}_3^1 &= -(x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) z_6 - g \sin(x_5 + x_8) u_1 - \\ &\quad -(x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) u_2, \\ \dot{z}_1^2 &= z_2^2, \\ \dot{z}_2^2 &= z_3^2, \\ \dot{z}_3^2 &= -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8) z_6 + g \cos(x_5 + x_8) u_1 - \\ &\quad -(x_7 + 1)g \sin(x_5 + x_8) u_2, \\ \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= (x_7 + 1)g(p_1 \cos(x_8 + \delta_0) + p_2 \sin(x_8 + \delta_0)). \end{aligned} \quad (6)$$

Можно видеть, что векторная относительная степень системы с указанными выходами равна (3,3) в любой точке области $x_7 + 1 > 0$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} (x_7 + 1)g \sin(x_8 + \delta_0) &= -z_3^1 \cos(x_5 + \vartheta_0) - (z_3^2 + g) \sin(x_5 + \vartheta_0), \\ (x_7 + 1)g \cos(x_8 + \delta_0) &= -z_3^1 \sin(x_5 + \vartheta_0) + (z_3^2 + g) \cos(x_5 + \vartheta_0), \end{aligned}$$

С учетом этого, запишем последние два уравнения системы (5) в переменных (z, η) и получим уравнения нулевой динамики:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 &= p_1 g \cos(\eta_1 + \theta_0) - p_2 g \sin(\eta_1 + \theta_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Со следующими положениями равновесия:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\theta_0 + \text{arctg} \frac{p_1}{p_2} = -\theta_0 + \text{arctg} \frac{d_1}{d_2} = 0, \\ \eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что нулевое положение равновесия неустойчиво.

Рассмотрим задачу стабилизации по части переменных z .

Необходимо выбрать $u = (u_1, u_2)^T$ так, чтобы он друг другу не противоречили. Для этого перепишем систему (6) в переменных z :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1^1 &= z_2^1, \\
 \dot{z}_2^1 &= z_3^1, \\
 \dot{z}_3^1 &= -(z_3^2 + g)\eta_2 - g \sin\left(\arctg \frac{-z_3^1}{z_3^2 + g}\right) u_1 - (z_3^2 + g)u_2, \\
 \dot{z}_1^2 &= z_2^2, \\
 \dot{z}_2^2 &= z_3^2, \\
 \dot{z}_3^2 &= z_3^1\eta_2 + g \cos\left(\arctg \frac{-z_3^1}{z_3^2 + g}\right) u_1 + z_3^2 u_2,
 \end{aligned} \tag{8}$$

Стабилизация нулевых значений переменных z достигается при выборе стабилизирующего управления:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= M_1 \operatorname{sign}(k_1 z_3^2 + g) \\
 u_2 &= M_2 \operatorname{sign}(k_2 (z_3^2 + g)),
 \end{aligned} \tag{9}$$

или, в переменных x :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= M_1 \operatorname{sign}(k_1 ((x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) x_6)), \\
 u_2 &= M_2 \operatorname{sign}(k_2 ((x_7 + 1)g \cos(x_5 + x_8) x_6)),
 \end{aligned}$$

где коэффициенты $M_1, M_2 > \frac{1}{2}|g \cos(x_5 + x_8)|$, а коэффициенты $k_1, k_2 > 1$ [14]

При этом поведение переменных η будет определяться уравнениями (6).

3. Заключение

В статье рассмотрено плоское движение вертолета в вертикальной плоскости. В качестве управлений выбраны скорость изменения тяги несущего винта и скорость изменения угла перекоса несущего винта. В работе построены законы стабилизации фиксированного положения центра масс вертолета в пространстве с использованием скользящих режимов.

Литература

1. Clarke R. Understanding the drone epidemic // *Comp Law Secur Rev.* – 2014. – 30 (3). – P. 230–246.
2. Idrissi M., Salami M. R., Annaz F. A Review of Quadrotor Unmanned Aerial Vehicles: Applications, Architectural Design and Control Algorithms // *Journal of Intelligent & Robotic Systems.* – 2022. –104.10.1007 – s10846-021-01527-7.
3. Huang H., He W., Fu Q., He X., Sun C. A Bio-inspired Flapping-Wing Robot with Cambered Wings and Its Application in Autonomous Airdrop // *CAA Journal of Automatica Sinica.* – 2022. – Vol. 9, № 12. – P. 2138–2150.
4. Esmail M.S., Merzban M.H., Khalaf A.A. M., Hamed H.F.A., Hussein A.I. Attitude and Altitude Nonlinear Control Regulation of a Quadcopter Using Quaternion Representation // *IEEE Access.* – 2022. – Vol. 10. – P. 5884–5894.
5. Esmail M.S., Merzban M.H., Khalaf A.A.M., Hamed H.F.A., Hussein A.I. Attitude and Altitude Tracking Controller for Quadcopter Dynamical Systems. // *IEEE Access.* – 2022. – Vol. 10. – P. 53344–53358.
6. Esmail M.S., Merzban M., Khalaf A.A., Hamed H.F.A. Comparison of various control techniques applied to a quadcopter. *J Adv Eng Trends.* – 2023. – V. 42(2). – P.233–244.
7. Hashim H.A., Eltoukhy A.E.E., Akos O. Observer-based controller for VTOL-UAVs tracking using direct Vision-Aided Inertial Navigation measurement // *ISA Transactions.* –2023. –Vol. 137. – P. 133–143.
8. Rodriguez-Guevara D., Favela-Contreras A., Gonzalez-Villarreal O.J. A qLPV-MPC Control Strategy for Trajectory Tracking of Quadrotors // *Machines.* – 2023. –Vol. 11. – P. 755.
9. Lu M., Yang W., Xiong Z., Liao F., Wu S., Su Y., Wu W. RBFNN-Based Adaptive Fixed-Time Sliding Mode Tracking Control for Coaxial Hybrid Aerial–Underwater Vehicles Under Multivariant Ocean Disturbances // *Drones.* – 2024. – Vol.8. – P. 745.
10. Lu M., Yang W., Xiong Z., Liao F., Wu S., Su Y., Wu W. Quaternion-Based Fast SMC–PD Cross-Domain Tracking Control for Coaxial Hybrid Aerial–Underwater Vehicle Under Oceanic Disturbances // *Appl. Sci.* – 2025. – Vol. 15. – P.703.
11. Jiang Y., Chai T., Chen G. Output Feedback-Based Adaptive Optimal Output Regulation for Continuous-Time Strict-Feedback Nonlinear Systems// *IEEE Transactions on Automatic Control.* – 2025. – Vol. 70, № 2. – P. 767–782.

12. *Ткачев С.Б.* Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных // *Машиностроение и компьютерные технологии.* – 2011. – № 11.
13. *Канатников А.Н., Крищенко А.П.* Терминальное управление пространственным движением летательных аппаратов // *ТиСУ.* – 2008. –Т., № 5. – С. 51–64.
14. *Кочетков С.А., Краснова С.А., Уткин В.А.* The New Second-Order Sliding Mode Control Algorithm // *Mathematics.* – 2022. – Vol. 10, Iss. 13. – P. 2214 (1–21).
15. *John T., Sastry S.* Output Tracking Control Design of a Helicopter Model Based on Approximate Linearization // *Proc. 37th IEEE Conf. Decision and Control.* Tampa. – 1998. – P. 3635–3640.
16. *Ткачёв С.Б.* Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем методов виртуальных выходов: автореф. дис. д.ф-м.н : 05.13.01 / Ткачёв С.Б., МГТУ им. Н. Э. Баумана. – М., 2010. – 32 с.