КОНСТАНТЫ НАКРЫВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Терентьев К.О.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
terentev.kon@mail.ru

Аннотация. Приведены ключевые результаты о свойстве накрываемости отображений в банаховых пространствах. Исследован вопрос о связи констант накрывания дифференцируемого отображения и его производной в случае строгой и непрерывной дифференцируемости.

Ключевые слова: накрывающие отображения, липшицевы отображения, константа накрывания.

Введение

Основной класс задач вариационного исчисления сводится к нахождению функций, на которых некоторый функционал достигает своего экстремального значения. С их решением тесно связано понятие точек совпадения. Их изучение является актуальной проблемой нелинейного анализа, и ему посвящено множество работ за авторством Арутюнова А.В., Гельмана Б.Д., Дмитрука А.В., Жуковского Е.С., Жуковского С.Е., Измаилова А.Ф., Карамзина Д.Ю., Милютина А.А., Обуховского В.В., Осмоловского Н.П. и других авторов.

Зачастую традиционные способы решения таких задач (например, принцип максимума Понтрягина) неприменимы, и приходится прибегать к более общим методам. В таких случаях при поиске точек совпадения широко используется понятие накрывания [1], и настоящая работа посвящена изучению его свойств, а также связи накрываемости отображения с накрываемостью его производной.

1. Накрывающие отображения

Будем рассматривать произвольное нормированное пространство X над $\mathbb{R}$ с нормой $||\cdot||_X: X \to \mathbb{R}_+$. *Индуцированной метрикой* на этом пространстве называется отображение $\rho_X: X \times X \to \mathbb{R}_+$, согласованное с нормой: $\rho_X(x', x'') = ||x' - x''||_X \ \forall x', x'' \in X$, и в дальнейшем под метрикой будем понимать именно её. При этом (X, ρ_X) – *метрическое пространство*.

Метрическое пространство (X, ρ_X) называется *банаховым*, если оно полно по своей метрике, то есть любая фундаментальная по ρ_X последовательность сходится к элементу из этого пространства. В настоящей работе будем рассматривать банаховые пространства X, Y с заданными нормами и соответствующими метриками.

Замкнутым шаром радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество

$$B_r^X(x_0) = \{x \in X: \rho_X(x, x_0) \leq r\}.$$

Окрестностью радиуса $r > 0$ с центром в точке $x_0 \in X$ называется множество

$$U_r^X(x_0) = \{x \in X: \rho_X(x, x_0) < r\}.$$

Пусть даны положительные числа α и β.

Отображение $F: X \to Y$ называется α-накрывающим относительно множества $U \subset X$, если

$$F\left(B_r^X(x)\right) \supseteq B_{\alpha r}^Y\left(F(x)\right) \ \forall x \in X, r \geq 0: B_r^X(x) \subseteq U.$$

Отображение $F: X \to Y$ называется α-накрывающим, если оно α-накрывает относительно всей своей области определения.

Отображение $F: X \to Y$ называется β-липшицевым на множестве $U \subset X$, если для любых $x', x'' \in U$ справедливо:

$$\rho_Y\left(F(x'), F(x'')\right) \leq \beta \rho_X(x', x'').$$

Отображение $F: X \to Y$ называется β-липшицевым, если оно является β-липшицевым на всей своей области определения.

Удобно представить определение α-накрываемости в виде неравенства. Рассмотрим некоторый $y \in B_{\alpha r}^Y\left(F(x)\right)$ такой, что $||y - F(x)||_Y = \alpha r$ (y можно рассматривать на границе шара в силу произвольности радиуса r и вложенности образов $F\left(B_{r'}^X(x)\right) \subset F(B_{r''}^X(x)$ при $0 < r' < r''$). Соотношение $y \in F\left(B_r^X(x)\right)$ эквивалентно существованию такого $\overline{x} \in B_r^X(x)$, что $F(\overline{x}) = y$. Тогда справедлива оценка:

$$\rho_X\big(x, F^{-1}(y)\big) \le \rho_X(x, \overline{x}) \le r = \frac{1}{\alpha}||y - F(x)||_Y,$$

где $F^{-1}(y)$ – полный прообраз y относительно F. В случае достижимости $\rho_X\big(x, F^{-1}(y)\big)$ (то есть существует $\overline{x} \in F^{-1}(y)$ такой, что $\rho_X(x, \overline{x}) = \rho_X\big(x, F^{-1}(y)\big)$) из полученной оценки вытекает существование такого $\overline{x} \in B_r^X(x)$, что $F(\overline{x}) = y$, то есть выполняется включение из определения и F является α -накрывающим. Если расстояние $\rho_X\big(x, F^{-1}(y)\big)$ недостижимо и выполняется оценка выше, то в силу определения нижней грани для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $\overline{x} \in F^{-1}(y)$, что

$$\rho_X(x, \overline{x}) \le \rho_X\big(x, F^{-1}(y)\big) + \varepsilon\alpha^{-1}||y - F(x)||_Y \le \frac{1+\varepsilon}{\alpha}||y - F(x)||_Y,$$

что означает накрываемость F с константой $\frac{\alpha}{1+\varepsilon}$. Из произвольности выбора ε вытекает, что, если оценка справедлива, то F накрывает с любой константой, меньшей α.

Важным свойством непрерывных накрывающих отображений является устойчивость к достаточно малым липшицевым возмущениям, что выражается в следующей теореме.

Теорема 1. (см. [2]) Пусть заданы отображения $\Phi: X \to Y$ и $\Psi: X \to Y$, причём Φ является непрерывным α-накрывающим в области $U \subset X$, Ψ является β-липшицевым в U, а константы α и β связаны неравенством $\alpha > \beta > 0$. Тогда отображение $\Phi + \Psi$ накрывает на U с константой $\alpha - \beta$.

Теорема 1 была предложена и доказана в [2] в более слабых предположениях, а именно вместо области U рассматривалось более общее понятие *полной системы*.

Также сделаем выводы о сюръективности накрывающих отображений.

Лемма 1. Если $F: X \to Y$ накрывает с некоторой константой $\alpha > 0$ на всей области определения, то оно сюръективно, то есть $F(X) = Y$.

Докажем лемму 1. Из определения α-накрываемости следует включение $F\big(B_r^X(x)\big) \supseteq B_{\alpha r}^Y\big(F(x)\big)$ для любых $x \in X$ и $r > 0$. Для любого $y \in Y$ можно подобрать такие r и x_0, что $y \in B_{\alpha r}^Y\big(F(x_0)\big)$ (так как $Y = \bigcup_{r>0} B_{\alpha r}^Y\big(F(x_0)\big)$ для любого $x_0 \in X$), а следовательно, существует такой $\overline{x} \in B_r^X(x_0)$, что $F(\overline{x}) = y$. Это означает, что $F(X) \supseteq Y$, а, следовательно, $F(X) = Y$. Лемма доказана.

Свойство накрывания отображений имеет практическое применение при поиске точек совпадения, что выражается в следующей теореме с условиями, аналогичными теореме 1.

Теорема 2. (см. [1]) Пусть заданы отображения $\Phi: X \to Y$ и $\Psi: X \to Y$, причём Φ является непрерывным α-накрывающим, Ψ является β-липшицевым, а константы α и β связаны неравенством $\alpha > \beta > 0$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что

$$\Phi(\xi) = \Psi(\xi), \qquad \rho_X(x_0, \xi) \le \frac{\rho_Y\big(\Phi(x_0), \Psi(x_0)\big)}{\alpha - \beta}.$$

В данной теореме предположение о полноте Y излишне, а точка совпадения ξ может быть не единственной, то есть утверждается только её существование и оценка расстояния от начального приближения.

В [1] аналогичные результаты были получены и для многозначных отображений вида $F: X \to 2^Y$, что говорит о широкой применимости данного утверждения к большому классу вырожденных задач.

2. Связь констант накрывания строго дифференцируемого отображения и его производной

Отображение $F: X \to Y$ называется *строго дифференцируемым* в точке $x_0 \in X$, если существует такой линейный оператор $A: X \to Y$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность точки x_0 $U = U(\varepsilon)$, для которой справедливо

$$\forall x', x'' \in U: ||F(x') - F(x'') - A(x' - x'')||_Y \le \varepsilon||x' - x''||_X.$$

Для дальнейших рассуждений приведём необходимые при доказательстве теоремы о связи констант накрывания строго дифференцируемого отображения и его производной утверждения.

Теорема 3 (теорема Банаха об открытом отображении, см. [3]) Пусть Λ – линейный оператор X в Y и $\Lambda(X) = Y$. Тогда образ всякого открытого подмножества пространства X открыт в Y.

Лемма 2. (см. [3]) Пусть дан линейный оператор $\Lambda: X \to Y$. Положим

$$\mathrm{C}(\Lambda) = \sup_{y\in Y} \frac{\inf\limits_{x\in\Lambda^{-1}(y)} ||x||_X}{||y||_Y},$$

где $\Lambda^{-1}(y)$ обозначает полный прообраз $y \in Y$ относительно Λ. Тогда, если $\Lambda(X) = Y$, то $C(\Lambda) < \infty$.

Докажем лемму 2. Так как $\Lambda(X) = Y$, то по теореме Банаха об открытом отображении образ $\Lambda(B_1^X(0))$ содержит окрестность нуля в Y, то есть существует $\delta > 0$ такое, что $B_\delta^Y(0) \subseteq \Lambda(B_1^X(0))$. Поэтому для любого $y \in Y$:

$$\inf_{x\in\Lambda^{-1}(y)} ||x||_X = \delta^{-1}||y||_Y \inf_{x\in\Lambda^{-1}(\delta||y||_Y{}^{-1}y)} ||x||_X \leq \delta^{-1}||y||_Y,$$

и, значит, $C(\Lambda) \leq \delta^{-1}$. Лемма доказана.

Отметим, что если Λ является α-накрывающим, то в доказательстве леммы можно положить $\delta = \alpha$, и тогда справедлива оценка $C(\Lambda) \leq \alpha^{-1}$.

Теорема 4. (Обобщённая теорема Люстерника, см. [3]) Пусть даны линейный оператор $\Lambda: X \to Y$ и F – отображение некоторой окрестности U' точки $x_0 \in X$ в Y. Пусть также $\Lambda(X) = Y$ и существует такое $\delta > 0$, что, во-первых,

$$\delta C(\Lambda) < \frac{1}{2},$$

и, во-вторых, для всех $x', x'' \in U'$ справедливо

$$||F(x') - F(x'') - \Lambda(x' - x'')||_Y \leq \delta||x' - x''||_X.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U \subseteq U'$ точки x_0, число $L = L(\varepsilon) > 0$ и отображение $\xi \to x(\xi)$ окрестности U в X такие, что:

$$F\big(\xi + x(\xi)\big) = F(x_0),$$

$$||x(\xi)||_X \leq L||F(\xi) - F(x_0)||_Y$$

для всех $\xi \in U$, причём константа L выражается следующим образом:

$$L(\varepsilon) = \frac{(1+\varepsilon)C(\Lambda)}{1 - \delta C(\Lambda)}.$$

Наконец, приведём саму теорему и её доказательство.

Теорема 5. (см. [4]) Пусть $F: X \to Y$ строго дифференцируемо на множестве $\Omega \subset X$, а также для любого $x \in \Omega$ линейный оператор $F'(x)$ накрывает с константой $\alpha > 0$. Тогда $\forall \overline{\alpha} \in (0, \alpha)$ существует открытое множество $U \supseteq \Omega$, на котором отображение F накрывает с константой $\overline{\alpha}$.

Докажем теорему 5. Зафиксируем $\overline{\alpha} \in (0, \alpha)$. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и обозначим $y = F(x_0)$. Оператор $F'(x_0)$ линейно α-накрывает по условию, а, следовательно, он сюръективен. Тогда по лемме 2 $C\big(F'(x_0)\big) < \infty$.

Рассмотрим произвольный $\delta > 0$, для которого справедливо $\delta C\big(F'(x_0)\big) < \frac{1}{2}$. Из определения строгой дифференцируемости в x_0 существует некоторая окрестность $U_1(x_0)$, в которой для любых $x', x'' \in U_1(x_0)$ справедливо

$$||F(x') - F(x'') - F'(x_0)(x' - x'')||_Y \leq \delta||x' - x''||_X.$$

Таким образом, отображения $F: U_1(x_0) \to Y$, $\Lambda = F'(x_0)$ и величина δ удовлетворяют условиям обобщённой теоремы Люстерника, из которой для любого $\varepsilon > 0$ вытекает существование окрестности $U(x_0)$ и отображения $\xi \to x(\xi)$ окрестности $U(x_0)$ в X такие, что для всех $\xi \in U(x_0)$ справедливо

$$F\big(\xi + x(\xi)\big) = y,$$

$$||x(\xi)||_X \leq \frac{(1+\varepsilon)C(F'(x_0))}{1 - \delta C(F'(x_0))}||F(\xi) - F(x_0)||_Y.$$

Так как $F'(x_0)$ α-накрывает по условию, то $C\big(F'(x_0)\big) \leq \alpha^{-1}$. Обозначая $x = \xi$, $\overline{x} = \xi + x(\xi)$, получаем:

$$F(\overline{x}) = y,$$

$$\rho_X(x, F^{-1}(y)) \leq ||\overline{x} - x||_X \leq \frac{1+\varepsilon}{\alpha-\delta}||F(x) - y||_Y$$

для любого $x \in U(x_0)$. Последнее соотношение означает, что отображение F накрывает на $U(x_0)$ с любой константой, меньшей $\frac{\alpha-\delta}{1+\varepsilon}$. В силу произвольности выбора ε и δ их можно выбрать таким образом, что $\frac{\alpha-\delta}{1+\varepsilon} = \frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2} > \overline{\alpha}$, а, следовательно, F накрывает на $U(x_0)$ с константой $\overline{\alpha}$.

Резюмируя вышесказанное, для произвольного $x_0 \in \Omega$ была получена окрестность $U(x_0)$, в которой отображение F накрывает с константой $\overline{\alpha}$. Тогда искомое множество $U = \bigcup_{x_0 \in \Omega} U(x_0)$. Теорема доказана.

В отдельную теорему выделим элементарное следствие теоремы 5 в случае, если Ω открыто.

Теорема 6. (см. [4]) Пусть $F: X \to Y$ строго дифференцируемо на открытом множестве $U \subset X$, а также для любого $x \in U$ линейный оператор $F'(x)$ накрывает с константой $\alpha > 0$. Тогда F накрывает на U с любой константой $\overline{\alpha} \in (0, \alpha)$.

3. Связь констант накрывания непрерывно дифференцируемого отображения и его производной

Покажем, как связаны свойства строгой и непрерывной дифференцируемости в банаховых пространствах. Для этого приведём теорему о среднем.

Теорема 7. (о среднем) Пусть отображение $F: D \subseteq X \to Y$ дифференцируемо (по Фреше) на выпуклом множестве $D_0 \subseteq D$. Тогда для любых $x', x'' \in D_0$ справедливо:

$$||F(x') - F(x'')||_Y \leq \sup_{t \in [0,1]} ||F'(x' + t(x'' - x'))||_{\mathcal{L}(X,Y)} ||x' - x''||_X,$$

где $\mathcal{L}(X, Y)$ – пространство линейных операторов из X в Y со следующей нормой:

$$||A||_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X} \frac{||Ax||_Y}{||x||_X}.$$

Теорема 8. В банаховых пространствах из непрерывной дифференцируемости отображения на некоторой окрестности следует его строгая дифференцируемость на этой окрестности.

Докажем теорему 8. Обозначим искомую окрестность через U. По определению непрерывности в $x_0 \in U$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall ||h||_X \leq \delta: ||F'(x_0 + h) - F'(x_0)||_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq \varepsilon.$$

Для $x', x'' \in U_\delta^X(x_0)$ и $t \in [0, 1]$ справедливо

$$||x' + t(x'' - x') - x_0||_X = ||t(x'' - x_0) + (1-t)(x' - x_0)||_X \leq t\delta + (1-t)\delta = \delta.$$

Рассмотрим отображение $G(x) = F(x) - F'(x_0)x$ и применим к нему теорему о среднем:

$$||F(x') - F(x'') - F'(x_0)(x' - x'')||_Y \leq \sup_{t \in [0,1]} ||F'\big(x' + t(x'' - x')\big) - F'(x_0)||_{\mathcal{L}(X,Y)} ||x' - x''||_X$$
$$\leq \varepsilon ||x' - x''||_X$$

что означает строгую дифференцируемость F в x_0 по определению. Теорема доказана.

Таким образом, теоремы, доказанные для случая строгой дифференцируемости, применимы и к непрерывно дифференцируемым отображениям. В частности, выделим следующую теорему, в которой накрываемость отображения предполагается лишь в одной точке.

Теорема 9. Пусть $F: X \to Y$ непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности точки $x_0 \in X$, а также $F'(x_0)$ является линейно α-накрывающим, $\alpha > 0$. Тогда для любого $\overline{\alpha} \in (0, \alpha)$ существует некоторая окрестность точки x_0, в которой отображение F будет $\overline{\alpha}$-накрывающим.

Докажем эту теорему. Зафиксируем $\overline{\alpha}$. Обозначим окрестность точки x_0, в которой F непрерывно дифференцируемо через S, а также введём число $\varepsilon = \frac{\alpha - \overline{\alpha}}{2}$. Из построения очевидно соотношение $0 < \overline{\alpha} < \alpha - \varepsilon < \alpha$.

Из непрерывной дифференцируемости F в S следует:

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x \in U_\delta^X(x_0) \subseteq S: ||F'(x) - F'(x_0)||_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon.$$

Обозначив $U = U_\delta^X(\, x_0)$, $\Delta(x) = F'(x) - F'(x_0)$ получаем, что $||\Delta(x)||_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon$ для всех $x \in U$. Тогда для любых $x', x'' \in X$:

$$||\Delta(x)x' - \Delta(x)x''||_Y \le ||\Delta(x)||_{\mathcal{L}(X,Y)}||x' - x''||_X < \varepsilon||x' - x''||_X,$$

то есть $\Delta(x)$ является ε-липшицевым по определению. Тогда по теореме 1 линейный оператор $F'(x) = F'(x_0) + \Delta(x)$ является $(\alpha - \varepsilon)$-накрывающим.

По построению $U \subseteq S$, а, следовательно, F непрерывно дифференцируемо на U и, как следствие, строго дифференцируемо на том же множестве. Тогда F удовлетворяет теореме 5 и накрывает на U с любой константой, меньшей $\alpha - \varepsilon$, а по построению $\overline{\alpha} < \alpha - \varepsilon$. Теорема доказана.

4. Заключение

Таким образом, была исследована связь констант накрывания дифференцируемого отображения и его производной при дополнительных предположениях. Полученные утверждения могут быть использованы для описания поведения функции без её аналитического выражения, имея информацию лишь о поведении производной, что может быть полезно при решении дифференциальных уравнений и включений.

Свойство накрывания широко используется при решении задач, условия которых не позволяют воспользоваться традиционными методами решения задач оптимального управления. В частности, накрывающие отображения применяются в задачах математической экономики для поиска равновесной цены в модели «спрос-предложение», а также имеют ряд других прикладных значений в математических задачах.

Литература

1. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 416, № 2. – С. 151–155.
2. *Левитин Е.С., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // УМН. – 1978. – Т. 33, № 6. – С. 85–148.
3. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
4. *Дмитрук А.В*. On a nonlocal metric regularity of nonlinear operators // Control and Cybernetics. – 2005. – Т. 34, № 3. – С. 723–746.
5. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными – М.: Мир, 1975. – 560 с.