

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Соболев В.А., Коннова К.А.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Самара, Россия
v.sobolev@ssau.ru, konnova.ka@ssau.ru

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о допустимости применения прецессионных уравнений для исследования гироскопических систем. На примере уравнения гировертикали с радиальной коррекцией при отсутствии трения показано, что использование уравнений прецессионной теории для этой системы приводит к неверным результатам.

Ключевые слова: гироскопическая система, декомпозиция, асимптотические методы, аппроксимация Паде.

Введение

Асимптотические методы являются одними из эффективных методов исследования поведения решений дифференциальных уравнений. Эти методы позволяют выявлять качественные особенности решения системы, что особенно важно при изучении динамических процессов.

В работе рассматривается задача о декомпозиции сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений для гироскопических систем. С помощью асимптотических методов находятся формулы для матриц, при помощи которых осуществляется построение расщепляющего преобразования, проводится численное сравнение результатов применения разных асимптотических методов.

На примере уравнений гировертикали с радиальной коррекцией показано, что исследование полной системы дифференциальных уравнений приводит к принципиально другому результату по сравнению с результатом, полученным при использовании уравнений прецессионной теории гироскопов, лежащей в основе традиционного аппарата исследования гироскопических систем.

Это подчеркивает важность учета особенностей гироскопических систем и необходимости повышения точности вычислений при применении приближенных методов исследования при анализе поведения таких систем. Как известно, одним из способов повышения точности асимптотических методов без вычисления дополнительных членов асимптотических разложений является применение дробно рациональных аппроксимаций Паде. Основная цель работы состоит в том, чтобы на примере уравнений гироскопических систем продемонстрировать преимущества матричных аппроксимаций Паде при построении расщепляющего преобразования.

1. Описание математической модели

Рассмотрим линейную автономную гироскопическую систему [1]

$$J\ddot{x} + (HG + D)\dot{x} + Cx = 0, \quad (1)$$

где x – вектор обобщенных координат, J и D – симметрические матрицы, J положительно определенная матрица, D – неотрицательно определенная матрица, G – кососимметрическая невырожденная матрица, H – большой параметр.

Введем обозначения $\dot{x} = y$, $\varepsilon = \frac{1}{H}$, тогда система (1) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \varepsilon J\dot{y} &= -(G + \varepsilon D)y - \varepsilon Cx. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) является сингулярно возмущенной стационарной системой линейных дифференциальных уравнений. Для такой системы можно построить расщепляющее преобразование и привести её к блочно-диагональному виду [2].

2. Построение расщепляющего преобразования

Для системы дифференциальных уравнений вида (2) расщепляющее преобразование строится в виде

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon Pz, \\ y &= z + \varepsilon Lx, \end{aligned} \quad (3)$$

где $L = L(\varepsilon), P = P(\varepsilon)$ – матричные функции, являющиеся решениями уравнений

$$\varepsilon^2 J L^2 = -(G + \varepsilon D)L - C, \quad (4)$$

$$P(-(G + \varepsilon D + \varepsilon^2 J L)) = \varepsilon^2 P L J + I. \quad (5)$$

Разрешимость данных уравнений следует из теоремы о неявной функции при условии обратимости матрицы G .

Расщепляющее преобразование (3) приводит систему (2) к блочно-диагональному виду

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \varepsilon L(\varepsilon)v, \\ \varepsilon \dot{z} &= -(G + \varepsilon D + \varepsilon^2 J L)z, \end{aligned} \quad (6)$$

что существенно упрощает её исследование, так как быстрые (v) и медленные (z) переменные становятся независимыми. Первое уравнение в (6) описывает прецессионные колебания гироскопической системы, а второе – нутационные колебания. Отметим, что нутационные колебания являются высокочастотными и могут угасать сравнительно медленно, если D положительно определенная матрица.

Неизвестные матричные функции $L = L(\varepsilon), P = P(\varepsilon)$, являющиеся решением уравнений (4)-(5), могут быть найдены в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} L &= L(\varepsilon) = L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)} + \varepsilon^2 L^{(2)} + \varepsilon^3 L^{(3)} + \dots, \\ P &= P(\varepsilon) = P^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

В работе предлагается также рассмотреть приближения L и P с помощью матричных аппроксимаций Паде [3].

Для сингулярно возмущенных систем матричные аппроксимации Паде эффективно использовались при решении задач управления в работах М.Г. Дмитриева и его коллег, см., например, [4-7].

Если разложения вида (9) найдены, то можно найти аппроксимации Паде $[m/n]$

$$\sum_{i=0}^k L^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{k+1}) \approx A_m(\varepsilon) B_n^{-1}(\varepsilon), \quad \sum_{i=0}^k P^{(i)} \varepsilon^i + O(\varepsilon^{k+1}) \approx M_m(\varepsilon) N_n^{-1}(\varepsilon), \quad (8)$$

где $A_m(\varepsilon), M_m(\varepsilon)$ – многочлены степени m с матричными коэффициентами $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$; $M^{(0)}, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(m)}$, соответственно, а $B_n(\varepsilon), N_n(\varepsilon)$ – многочлены степени n , с матричными коэффициентами $I, B^{(1)}, B^{(2)}, \dots, B^{(n)}$; $I, N^{(1)}, N^{(2)}, \dots, N^{(n)}$, соответственно, символом I обозначается единичная матрица соответствующего размера.

3. Возможные обобщения и приложения

Описанный выше подход без существенных изменений может быть применен для расщепления сингулярно возмущенных систем вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{11}x + A_{12}y, \\ \varepsilon \dot{y} &= A_{21}x + A_{22}y, \end{aligned} \quad (9)$$

где $x, y \in R^n, A_{ij} = A_{ij}(t, \varepsilon), i, j = 1, 2, \varepsilon$ – малый параметр, расщепляющее преобразование:

$$\begin{aligned} x &= v + \varepsilon Pz, \\ y &= z + Lx, \end{aligned} \quad (10)$$

где $P = P(\varepsilon), L = L(\varepsilon)$ – матричные функции, являющиеся решениями уравнений

$$\varepsilon \dot{L} + \varepsilon L(A_{11} + A_{12}L) = A_{21} + A_{22}L,$$

$$\varepsilon \dot{P} + PA_2 = \varepsilon A_1 P + A_{12},$$

$$A_1 = A_{11} + A_{12}L, \quad A_2 = A_{22} - \varepsilon LA_{12}.$$

Для построения асимптотических разложений решений данных уравнений, помимо естественных предположений о возможности представления матриц системы в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра, достаточно потребовать существование ограниченной матрицы $A_{22}(t, 0)$. Более детально условия существования и обоснование асимптотического характера представлений матриц в виде разложений по степеням малого параметра изложены в работах [2, 8].

Расщепляющее преобразование (10) приводит систему (9) к блочно-диагональному виду

$$\begin{aligned}\dot{v} &= A_1(t, \varepsilon)v, \\ \varepsilon \dot{z} &= A_2(t, \varepsilon)z,\end{aligned}\tag{11}$$

что существенно упрощает её исследование, так как быстрые (v) и медленные (z) переменные становятся независимы друг от друга.

Помимо гироскопических систем расщепляющее преобразование может эффективно использоваться для решения широкого круга задач механики и теории управления, в частности, для анализа моделей манипуляционных роботов [9].

4. Уравнения гировертикали с радиальной коррекцией

В качестве примера рассмотрим уравнения гироскопической вертикали с радиальной коррекцией при отсутствии трения

$$\begin{aligned}A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} - k\beta &= 0, \\ A\ddot{\beta} + H\dot{\alpha} + k\alpha &= 0,\end{aligned}\tag{12}$$

где $A, H, k - const$. Именно эти уравнения выбраны для иллюстрации используемого авторами подхода по нескольким причинам. Как известно, при анализе уравнений гироскопических систем обычно используются уравнения прецессионной теории гироскопов, которые применительно к системе (1) имеют вид

$$(HG + D)\dot{x} + Cx = 0,$$

а для уравнений гироскопической вертикали, соответственно,

$$\begin{aligned}H\dot{\beta} + k\beta &= 0, \\ H\dot{\alpha} + k\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Последняя система асимптотически устойчива, в отличие от исходной, которая неустойчива. Именно поэтому при исследовании вопроса о допустимости перехода от полных уравнений к уравнениям прецессионной теории специалисты указывают, что не следует пренебрегать силами трения. Достоинством выбранного примера является и то обстоятельство, что матрицы L и P могут быть найдены точно. Соответствующие формулы авторы не приводят ввиду их громоздкости, но используют для сравнения при проведении численных экспериментов.

Введем обозначения

$$\dot{\alpha} = \gamma, \dot{\beta} = \delta, \varepsilon = \frac{1}{H}, x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix},$$

тогда система (12) примет вид (2) при

$$\begin{aligned}J &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = AI, \\ G &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = 0, C = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} = kG.\end{aligned}\tag{13}$$

Для системы (2) при (13) найдем расщепляющее преобразование

$$\begin{aligned}x &= v + \varepsilon APz, \\ y &= z + \varepsilon Lx.\end{aligned}\tag{14}$$

Матричные функции L и P находятся как решения уравнений

$$\varepsilon^2 AL^2 = -kG - GL,\tag{15}$$

$$-P(G + \varepsilon^2 AL) = I + \varepsilon^2 ALP.\tag{16}$$

Принимая во внимание соотношения $G^2 = -I, G^{-1} = -G$, можно представить уравнение (15) в форме

$$\varepsilon^2 AGL^2 = kI + L,$$

и получим выражение для L в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$L = L(\varepsilon) = -kI + \varepsilon^2 k^2 AG + \varepsilon^4 2A^2 k^3 + O(\varepsilon^6).\tag{17}$$

Решение для L , полученное с помощью аппроксимации Паде [2/2]:

$$L = L(\varepsilon) \approx [-kI - \varepsilon^2 k^2 AG](I + \varepsilon^2 2kAG)^{-1} =$$

$$= \left(k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \varepsilon^2 k^2 A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 2kA \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Уравнение (16) удобно переписать в форме

$$P = G + \varepsilon^2 ALPG + \varepsilon^2 APLG,$$

и найти из него решение, полученное разложением по степеням малого параметра:

$$P = P(\varepsilon) = G + \varepsilon^2 2kAI - \varepsilon^4 6k^2 A^2 G + O(\varepsilon^6). \quad (19)$$

Аппроксимация Паде [2/2] для P имеет вид

$$P = P(\varepsilon) \approx (G - \varepsilon^2 AkI)(I + \varepsilon^2 3kAG)^{-1}. \quad (20)$$

На рисунке 1 представлено численное сравнение формул, полученных для L . Полученное с помощью аппроксимации Паде [2/2] асимптотическое представление (18) дает лучшее приближение к точному решению уравнения (15) по сравнению с представлением (17) для каждого элемента матрицы L .

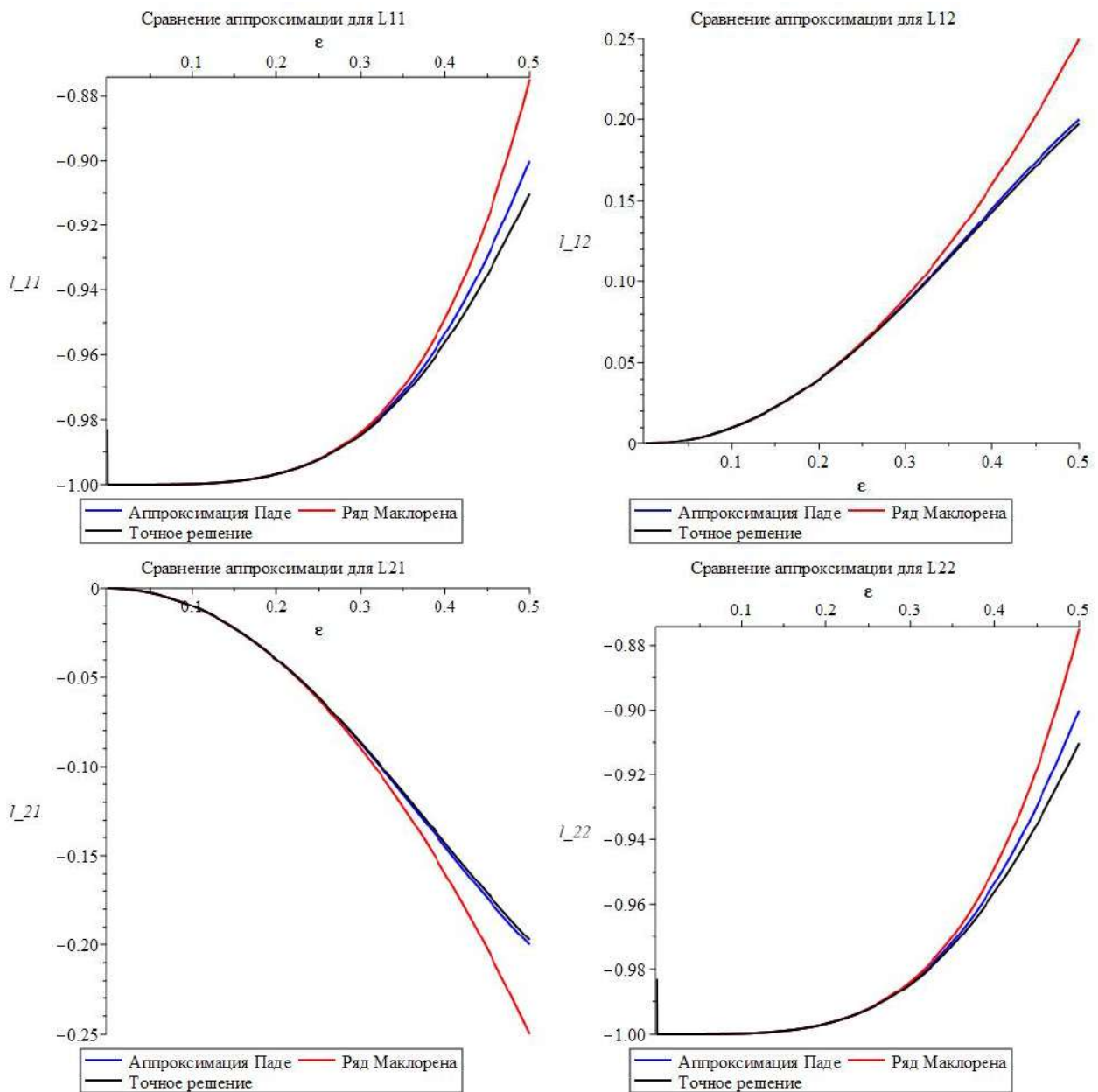


Рис. 1. Сравнение аппроксимаций для элементов матрицы $L(\varepsilon)$

Для матрицы P аппроксимация Паде [2/2] также дает лучшее приближение к точному решению по сравнению с представлением в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра (19).

После нахождения необходимых представлений для расщепляющего преобразования (14) – задача декомпозиции решена. Система (12) при (13) представляется в блочно-диагональном виде:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= Lv, \\ \varepsilon \dot{z} &= \left(-\varepsilon AL + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) z. \end{aligned} \quad (21)$$

В системе (21) быстрые и медленные переменные независимы друг от друга.

Из вида матрицы L следует асимптотическая устойчивость медленной подсистемы. Матрица быстрой подсистемы может быть представлена в форме

$$\left(-\varepsilon AL + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \varepsilon^2 k & 1 \\ -1 & \varepsilon^2 k \end{pmatrix} + O(\varepsilon^4),$$

из которой следует неустойчивость быстрой подсистемы. Этот факт не зависит от используемого асимптотического представления L , если учитываются члены второго порядка по малому параметру, включительно. Неустойчивость быстрой подсистемы также подтверждается графиками компонентов решения (рисунок 2). Заметен очень медленный рост амплитуды нутационных колебаний. Приведены только графики, соответствующие матричной аппроксимации Паде, графики, соответствующие точному значению L и его аппроксимации в виде отрезка степенного ряда практически неотличимы от приведенных графиков.

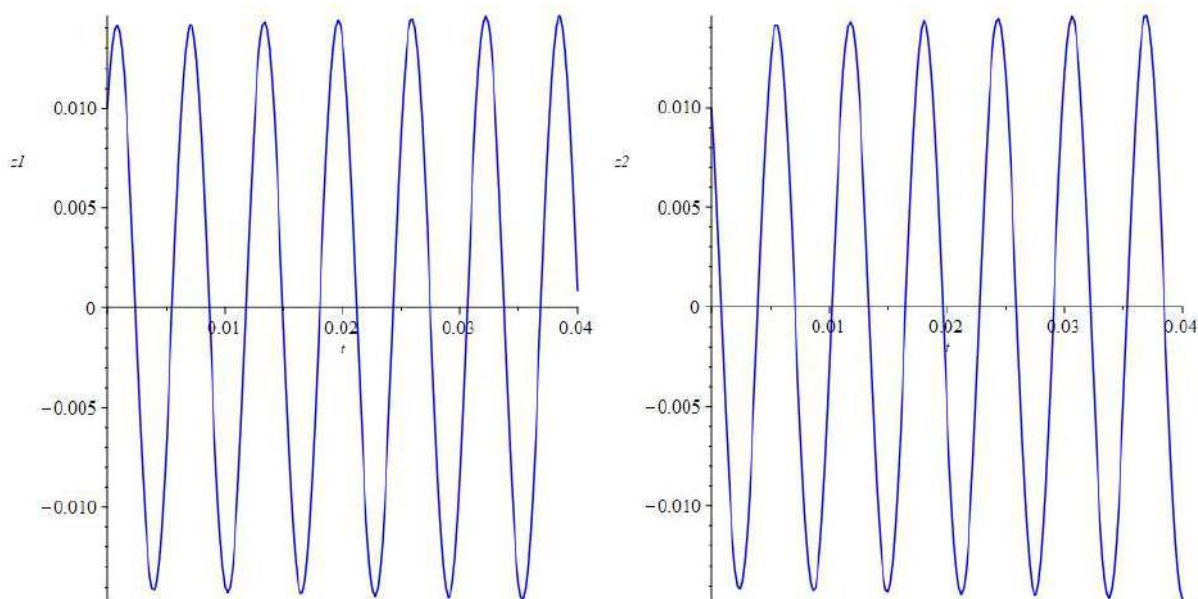


Рис. 2. Графики компонентов решения быстрой подсистемы (21) для аппроксимации Паде [2/2] (18)

5. Заключение

В работе проведен сравнительный анализ результатов применения рациональных и дробно-рациональных асимптотических представлений для матричных преобразований линейных гироскопических систем, приводящих исходную дифференциальную систему к блочно-диагональному виду. В качестве иллюстрирующего примера рассмотрены уравнения гировертикали с радиальной коррекцией. Найдено расщепляющее преобразование, приводящее систему к блочно-диагональному виду. Проведено сравнение асимптотических представлений, найденных с помощью разложения по степеням малого параметра и аппроксимации Паде, получены решения быстрой и медленной подсистемы. Показано преимущество матричных аппроксимаций Паде перед отрезками степенных рядов.

Авторы выражают глубокую признательность профессору М.Г. Дмитриеву, который обратил их внимание на возможность использования аппроксимаций Паде для решения задач понижения порядка динамических моделей с сингулярными возмущениями.

Литература

1. Меркин Д.Р. Гироскопические системы. – М.: Наука, 1974. – 300 с.
2. Воропаева Н.В. Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем / Н.В. Воропаева, В.А. Соболев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 256 с.
3. Бейкер Дж. Аппроксимация Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Морис. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. Беляева Н.П., Дмитриев М.Г. Построение приближенного решения начальных задач с параметром на основе Паде-аппроксимации и асимптотических разложений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – № 44. – С. 123–135.
5. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г. Построение стабилизирующих регуляторов для нелинейных дискретных слабосвязанных систем на основе метода SDRE // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2019): труды Двенадцатой международной конференции. – М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 442–444.
6. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г. Построение Паде регулятора для сингулярно возмущенной линейно-квадратичной задачи // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2020): труды Тринадцатой международной конференции. – М.: ИПУ РАН, 2020. – С. 671–677.
7. Даник Ю.Э., Дмитриев М.Г. Приближенные символьные представления регуляторов для слабонелинейных дискретных задач управления с параметром // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2022): труды Пятнадцатой международной конференции. – М.: ИПУ РАН, 2022. – С. 573–580.
8. Sobolev V.A. Decomposition of linear singularly perturbed systems // Acta. math. Hung. – 1987. – V. 49, № 3–4. – P. 365–376.
9. Shchepakina E. Singular Perturbations. Introduction to System Order Reduction Methods with Applications / E. Shchepakina, V. Sobolev, M.P. Mortell. – Berlin; Heidelberg; London: Springer, 2014. – 212 p.