

ДРОБНО-ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ В ВЫРОЖДЕННЫХ СЛУЧАЯХ

Соболев В.А., Долгова Е.С., Щепаккина Е.А.

Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Самара, Россия
v.sobolev@ssau.ru, dolgova.es@ssau.ru, shchepakina@ssau.ru

Аннотация. Одной из центральных проблем, возникающих при исследовании многих прикладных задач, является проблема вычисления критических значений параметров. Основная трудность заключается в том, что эти значения необходимо определять с высокой степенью точности. Для решения этой проблемы в работе предложены дробно-иррациональные аппроксимации.

Ключевые слова: аппроксимация Паде, асимптотические разложения, критические значения, вырожденный случай.

Введение

Одной из центральных проблем, возникающих при исследовании широкого круга прикладных задач, является проблема вычисления критических значений управляющих параметров. Основная трудность заключается в том, что эти значения необходимо определять с высокой степенью точности. Это означает, что при использовании асимптотических разложений для критических значений параметров желательно найти как можно больше членов разложения. Однако при этом сложность аналитических вычислений быстро возрастает, что делает практическую реализацию теоретических представлений проблематичной. Хорошо известное решение этой проблемы основано на использовании дробно-рациональных аппроксимаций (аппроксимаций Паде), которые позволяют значительно повысить точность асимптотических формул, не требуя дополнительных громоздких аналитических вычислений. В данной работе предложены дробно-иррациональные аппроксимации, обсуждаются вопросы их применимости и эффективности.

1. Дробно-иррациональные аппроксимации

Основы современного асимптотического анализа были заложены в работе А. Пуанкаре [1]. Приведем некоторые сведения из теории асимптотических разложений для случая, когда роль переменной играет положительный малый параметр.

Последовательность функций $\{\sigma_n(\varepsilon)\}$, $\sigma_n(0) = 0$ называется асимптотической последовательностью при $\varepsilon \rightarrow +0$, если существует окрестность $(0, \varepsilon_0)$, в которой ни одна из функций не обращается в нуль, и если для всех n $\sigma_{n+1}(\varepsilon) = o(\sigma_n(\varepsilon))$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. Наличие такой последовательности позволяет сформировать формальный ряд

$$\sum_0^{\infty} c_n \sigma_n(\varepsilon),$$

не обязательно сходящийся, который является асимптотическим разложением функции $F(\varepsilon)$ по асимптотической последовательности $\{\sigma_n(\varepsilon)\}$, если для каждого значения m

$$F(\varepsilon) - \sum_0^m c_n \sigma_n(\varepsilon) = o(\sigma_m(\varepsilon))$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Функции $\sigma_n(\varepsilon)$ в литературе по асимптотическим методам называются калибровочными функциями (gauge functions) [2].

Основная трудность, возникающая при построении дробно-иррациональных аппроксимаций, состоит в том, что умножение асимптотических рядов может не приводить к асимптотическому ряду, так как в произведение рядов входят все попарные произведения $\sigma_i(\varepsilon)\sigma_j(\varepsilon)$, а систему функций $\{\sigma_i(\varepsilon)\sigma_j(\varepsilon)\}$ в общем случае невозможно упорядочить так, чтобы получилась асимптотическая последовательность. В ряде случаев, однако, это можно сделать. Ниже будет рассмотрен один из таких случаев.

Асимптотическая последовательность строится следующим образом. Она состоит из функций, представляющих собой произведения малого параметра в степени кратной $1/3$ и целых степеней натурального логарифма малого параметра, т. е. это функции вида

$$\phi_{k,l} = \varepsilon^{k/3} \ln^l \varepsilon.$$

Ясно, что диапазон изменения целого неотрицательного числа l следует ограничивать в зависимости от значений целого неотрицательного числа k так как

$$\phi_{k,l} = o(\phi_{k,l+1}). \quad (1)$$

Соответствующее ограничение вводится следующим путем. Для каждого целого неотрицательного числа k рассматриваются следующие функции из асимптотической последовательности

$$\varepsilon^{k/3} \ln^s \varepsilon, \quad s = \left[\frac{k}{3} \right], \left[\frac{k}{3} \right] - 1, \left[\frac{k}{3} \right] - 2, \dots, 0. \quad (2)$$

Здесь квадратные скобки используются для обозначения целой части числа. Выпишем несколько первых членов асимптотической последовательности

$$\begin{aligned} \sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = \varepsilon^{1/3}, \quad \sigma_2 = \varepsilon^{2/3}, \quad \sigma_3 = \varepsilon \ln \varepsilon, \quad \sigma_4 = \varepsilon, \quad \sigma_5 = \varepsilon^{4/3} \ln \varepsilon, \quad \sigma_6 = \varepsilon^{4/3}, \\ \sigma_7 = \varepsilon^{5/3} \ln \varepsilon, \quad \sigma_8 = \varepsilon^{5/3}, \quad \sigma_9 = \varepsilon^2 \ln^2 \varepsilon, \quad \sigma_{10} = \varepsilon^2 \ln \varepsilon, \quad \sigma_{11} = \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Введенное множество элементов асимптотической последовательности является расширением множества, которое используется для построения асимптотических разложений в задачах теории релаксационных колебаний (см., например, [3]). Заметим, что из соотношения (1) следует, что произведения функций из асимптотической последовательности можно упорядочить и, более того, формулы (2) означают, что произведения принадлежат этой последовательности. Таким образом, элементы введенной асимптотической последовательности образуют упорядоченную полугруппу с коммутативной операцией умножения. Это существенно упрощает задачу построения дробно-иррациональных приближений. Следует отметить, что в рассматриваемом случае введенная выше величина ε_0 должна быть достаточно малой, так как, например, неравенство $\sigma_2 > |\sigma_3|$ выполняется на промежутке, практически не превышающем отрезок $[0; 0,01]$ (немаловажный с практической точки факт).

Пусть

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= a_0 + a_1 \sigma_1(\varepsilon) + a_2 \sigma_2(\varepsilon) + \dots + a_k \sigma_k(\varepsilon), \\ B(\varepsilon) &= 1 + b_1 \sigma_1(\varepsilon) + b_2 \sigma_2(\varepsilon) + \dots + b_m \sigma_m(\varepsilon). \end{aligned}$$

Функцию

$$\{k/m\} = \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)}$$

будем называть дробно-иррациональной аппроксимацией, введенной выше функции $F(\varepsilon)$, если

$$F(\varepsilon) - \{k/m\} = o(\sigma_n(\varepsilon)),$$

где $n = k + m$.

Коэффициенты разложений функций $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ находятся аналогично тому, как это делается при построении аппроксимаций Паде, путем приравнивания коэффициентов при одинаковых калибровочных функциях в равенстве

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \sigma_1(\varepsilon) + a_2 \sigma_2(\varepsilon) + \dots + a_k \sigma_k(\varepsilon) = \\ = (1 + b_1 \sigma_1(\varepsilon) + b_2 \sigma_2(\varepsilon) + \dots + b_m \sigma_m(\varepsilon))(c_0 + c_1 \sigma_1(\varepsilon) + c_2 \sigma_2(\varepsilon) + \dots + c_n \sigma_n(\varepsilon)). \end{aligned}$$

В качестве примера можно привести аппроксимацию

$$\{1/1\} = \frac{c_0 + \varepsilon^{1/3}(c_1 - c_0 c_2/c_1)}{1 - \varepsilon^{1/3} c_2/c_1}.$$

Заметим, что при $\sigma_n(\varepsilon) = \varepsilon^n$ получается дробно-рациональная аппроксимация Паде. В отличие от аппроксимаций Паде, которые обозначаются квадратными скобками, в данной работе для обозначения дробно-иррациональных аппроксимаций применяются фигурные скобки.

Для построения дробно-иррациональных аппроксимаций можно предложить различные асимптотические последовательности. Рассмотрим простой пример линейной дифференциальной системы

$$\dot{x} = y, \quad (1 - \varepsilon)y = 2y - x.$$

При $\varepsilon = 0$ фазовый портрет представляет собой неустойчивый вырожденный узел с единственным собственным вектором, которому соответствует единственное одномерное инвариантное многообразие $y = x$. Если малый параметр отличен от нуля, то рассматриваемая дифференциальная система имеет два собственных вектора, которым соответствуют линейные инвариантные многообразия вида $y = L(\varepsilon)x$, где L является корнем уравнения

$$(1 - \varepsilon)L^2 = 2L - 1,$$

и представимы в виде разложения по дробным степеням малого параметра [4]

$$L(\varepsilon) = 1 + c_1\varepsilon^{1/2} + c_2\varepsilon + c_3\varepsilon^{3/2} + \dots.$$

Если в качестве асимптотической последовательности рассмотреть последовательность функций $\varepsilon^{k/2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), то дробно-иррациональная аппроксимация вида

$$\{1/2\} = \frac{a_0 + a_1 \varepsilon^{1/2}}{1 + b \varepsilon}$$

дает точные выражения для $L(\varepsilon)$ при $a_0 = 1$, $a_1 = \pm 1$, $b = -1$.

При беглом знакомстве с работами по дробно-рациональным аппроксимациям может сложиться впечатление, что они заведомо лучше аппроксимаций, представляющих собой конечные суммы разложений функций в степенные ряды. Конечно, это не так. Ограничиваясь разложениями в окрестности нуля, нетрудно убедиться в том, что для всех функций, у которых первая и третья производные в нуле имеют противоположные знаки, аппроксимация Паде порядка [1/1] уступает квадратичной аппроксимации отрезка ряда Маклорена. Примером такой функции может служить функция

$$(1 + \varepsilon)^{3/2},$$

для которой первые три члена разложения в степенной ряд

$$1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^3 + \frac{3}{128}\varepsilon^4 + \dots$$

приближают рассматриваемую функцию лучше дробно-рациональной аппроксимации Паде

$$[1/1] = \frac{1 + \frac{5}{4}\varepsilon}{1 - \frac{1}{4}\varepsilon}.$$

Конечно, это не относится ко всем дробно-рациональным аппроксимациям. Нетрудно убедиться в том, что аппроксимация Паде порядка [2/2]

$$[2/2] = \frac{1 + \frac{7}{4}\varepsilon + \frac{35}{48}\varepsilon^2}{1 + \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{48}\varepsilon^2}$$

выигрывает по сравнению с аппроксимацией Маклорена

$$1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^3 + \frac{3}{128}\varepsilon^4.$$

На основании этого примера можно сделать тривиальное заключение о необходимости построения дробно-рациональных аппроксимаций более высоких порядков в подобных ситуациях. Аналогичная ситуация имеет место и для дробно-иррациональных аппроксимаций.

2. Вырожденные случаи

Специалистам по прикладной математике хорошо знакома ситуация, когда при попытке применить какой-то метод для решения конкретной задачи выясняется, что именно для этой задачи не выполняются основные предположения, допускающие применимость рассматриваемого метода. В теории аппроксимаций Паде такие ситуации известны и возникают при вырождении определителей Ганкеля [5]. В качестве примера приводится функция $1 + z^2$. Попытка построения дробно-рациональной аппроксимации Паде вида

$$[1/1] = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z}$$

приводит к равенствам

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad b_0 = 0.$$

Это означает, что $[1/1] = 1$, т.е. попытка оказалась неудачной. Понятно, что причиной неудачи является отсутствие ненулевого слагаемого с первой степенью переменной z . Аналогичная ситуация возникает при попытках построения дробно-иррациональных аппроксимаций в случае, когда $c_1 = 0$. Тем не менее удастся построить некоторые дробно-иррациональные аппроксимации и в этом случае.

Рассмотрим случай, когда для функции $F(\varepsilon)$ имеет место асимптотическое представление

$$F(\varepsilon) = c_0 + c_2 \varepsilon^{2/3} + c_3 \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon).$$

Функция такого типа возникает при вычислении периода релаксационного предельного цикла для уравнения Ван дер Поля [6] и в ряде других задач, и относится к случаю, когда $c_1 = 0$, $c_5 = 0$.

Предпримем попытку построения дробно-иррациональной аппроксимации с помощью асимптотической последовательности (2), и будем искать коэффициенты представления

$$\{2/3\} = \frac{a_0 + a_2 \varepsilon^{2/3}}{1 + b \varepsilon \ln \varepsilon}$$

путем приравнивания коэффициентов при соответствующих функциях от ε в соотношении

$$a_0 + a_2 \varepsilon^{2/3} = (1 + b \varepsilon \ln \varepsilon) (c_0 + c_2 \varepsilon^{2/3} + c_3 \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon)). \quad (3)$$

В результате, игнорируя в (3) члены, начиная с порядка малости $O(\varepsilon)$, получим:

$$a_0 = c_0, \quad a_2 = c_2, \quad b = -c_3 / c_0. \quad (4)$$

Аппроксимация такого типа применена в следующем разделе.

3. Асимптотические разложения периода релаксационного цикла системы Ван дер Поля

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля с большим параметром μ

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt}, \quad (5)$$

которое после замен

$$t = \mu\tau, \quad \mu^2 = 1/\varepsilon,$$

приводится к виду:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{d\tau} = y - \frac{1}{3} x^3 + x, \\ \frac{dy}{d\tau} = -x. \end{cases} \quad (6)$$

Период релаксационного цикла для (6) имеет асимптотическое представление в виде известной формулы А.А. Дородницына [7]:

$$T_\varepsilon = 3 - \ln 4 + 3\Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \frac{1}{3} \varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon), \quad (7)$$

где $\Omega_0 = 2,33810741$. Для исходного уравнения Ван дер Поля (5) период выражается формулой

$$T_\mu = \mu(3 - \ln 4) + 3\Omega_0 \mu^{-1/3} - \frac{2}{3\mu} \ln \mu + O(1/\mu), \quad (8)$$

т. е. $T_\varepsilon = T_\mu / \mu$.

Для построения дробно-иррациональной аппроксимации $\{2/3\}$ периода T_ε воспользуемся выражениями (4), которые с учетом (7) принимают вид:

$$a_0 = 3 - \ln 4, \quad a_2 = 3\Omega_0, \quad b = -\frac{1}{3(3 - \ln 4)},$$

откуда получаем следующую аппроксимацию для T_ε :

$$\{2/3\} = \frac{3(3 - \ln 4)^2 + 9\Omega_0(3 - \ln 4) \varepsilon^{2/3}}{3(3 - \ln 4) - \varepsilon \ln \varepsilon}. \quad (9)$$

Сравним эффективность аппроксимаций (7) и (9). Для этого воспользуемся результатами работ [8-10], в которых с высокой степенью точности найдены значения периода T_μ релаксационного цикла уравнения Ван дер Поля (5) для многих значений параметра μ . В таблице 1 значения периода T_μ используются в качестве контрольных.

Таблица 1. Значения T_μ/μ для некоторых значений μ

μ	T_μ/μ из (8)	$T_\mu/\mu = T_\varepsilon$ из (9)	Контрольные значения T_μ/μ
3	3,1534800841968817	3,0795576118683333	2,9530318332399724
5	2,3911873994309665	2,3710450917926629	2,3224461335439140
8	2,0304399288626111	2,0249201760997087	2,0047720290225582
10	1,9239310689747813	1,9210078203350696	1,9078369566939014
20	1,7379176719421868	1,7375345390422775	1,7341161655826342
60	1,6428093229613466	1,6427956547945298	1,6424131493146484
140	1,6231865415635883	1,6231855541385743	1,6231159406503807

На рисунке 1 представлены графики функции T_μ/μ , построенные на основании формул (7) и (9), а также точками изображены контрольные значения для некоторых μ .

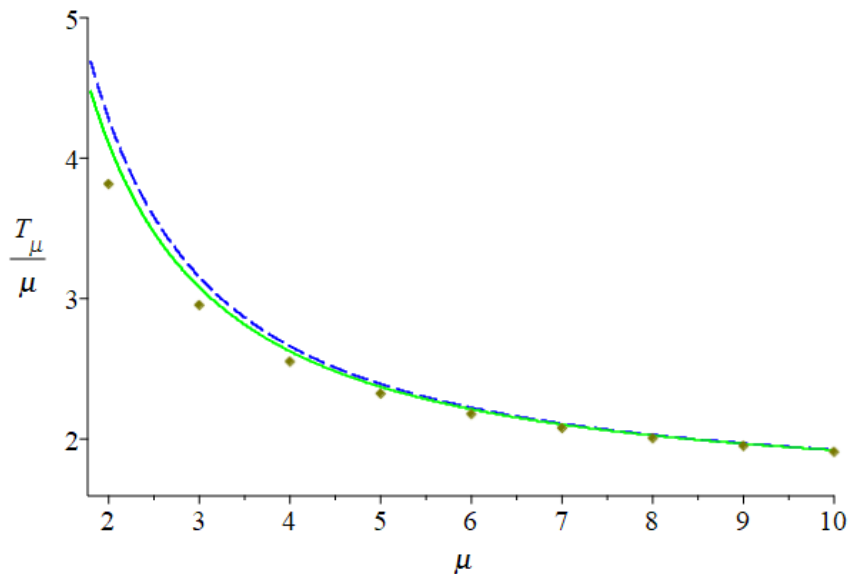


Рис. 1. Графики функции T_μ/μ , построенные на основании формул (7) (пунктирная кривая) и (9) (сплошная кривая), точками изображены контрольные значения

Полученные результаты свидетельствуют о том, что обе аппроксимации показывают близкие значения и дают хорошее приближение с учетом того, что они имеют погрешность порядка $O(\varepsilon)$. Наряду с этим, с уменьшением ε аппроксимация (9) дает более близкие к контрольным значения, чем (7), что вполне ожидаемо. Действительно, иерархия малости калибровочных функций в дробно-иррациональной аппроксимации соблюдается только для достаточно малых значений ε , см. [11].

Можно рассмотреть другую, более точную, дробно-иррациональную аппроксимацию периода T_ε :

$$\{4/3\} = \frac{a_0 + a_2 \varepsilon^{2/3} + a_4 \varepsilon}{1 + b \varepsilon \ln \varepsilon},$$

для построения которой необходимо учитывать члены порядка $O(\varepsilon)$ в формуле А.А. Дороницына:

$$T_\varepsilon = 3 - \ln 4 + 3\Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \frac{1}{3} \varepsilon \ln \varepsilon - 1,323265101\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}). \quad (10)$$

Непосредственные вычисления дают

$$a_0 = 3 - \ln 4, \quad a_2 = 3\Omega_0, \quad a_4 = -1,323265101, \quad b = -\frac{1}{3(3 - \ln 4)},$$

следовательно, аппроксимация $\{4/3\}$ для T_ε принимает вид:

$$\{4/3\} = \frac{3(3 - \ln 4)^2 + 9\Omega_0(3 - \ln 4) \varepsilon^{2/3} - 3,969795303(3 - \ln 4)\varepsilon}{3(3 - \ln 4) - \varepsilon \ln \varepsilon}. \quad (11)$$

Сравним эффективность аппроксимаций (10) и (11) при помощи контрольных значений, подобно тому, как это было сделано для (7) и (9), см. таблицу 2.

Таблица 2. Значения T_μ/μ для некоторых значений μ

μ	$T_\mu/\mu = T_\varepsilon$ из (10)	$T_\mu/\mu = T_\varepsilon$ из (11)	Контрольные значения T_μ/μ
3	3,0064506285302150	2,9395868399595755	2,9530318332399724
5	2,3382567953909665	2,3194857668799051	2,3224461335439140
8	2,0097639116594861	2,0045180180577474	2,0047720290225582
10	1,9106984179647813	1,9078998603571779	1,9078369566939014
20	1,7346095091896868	1,7342365803413294	1,7341161655826342
60	1,6424417493221799	1,6424282537815435	1,6424131493146484
140	1,6231190280380271	1,6231180476444685	1,6231159406503807

На рисунке 2 представлены графики функции T_μ/μ , построенные на основании формул (10) и (11), а также точками изображены контрольные значения для некоторых μ .

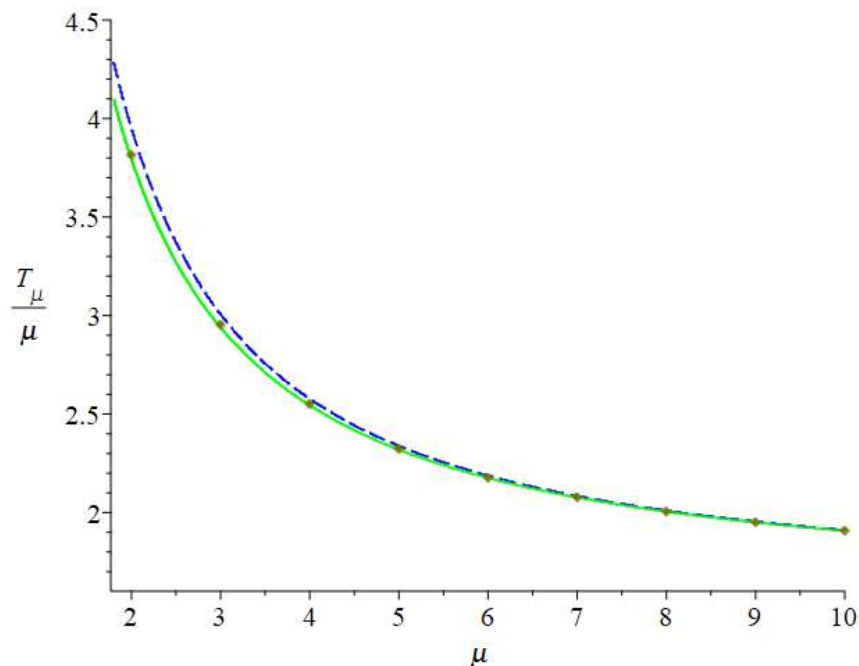


Рис. 2. Графики функции T_μ/μ , построенные на основании формул (10) (пунктирная кривая) и (11) (сплошная кривая), точками изображены контрольные значения

Как и в предыдущем случае, обе аппроксимации показывают близкие значения и дают хорошее приближение, однако дробно-иррациональная аппроксимация демонстрирует преимущество в точности.

4. Заключение

В работе были предложены дробно-иррациональные аппроксимации, с помощью которых можно повысить точность асимптотических формул, не прибегая к дополнительным громоздким аналитическим вычислениям. Рассмотрены так называемые вырожденные случаи и намечены пути построения асимптотических формул в таких случаях. Следует отметить, что повышение порядка дробно-иррациональной аппроксимации требует знание большего количества членов разложения исходного асимптотического представления.

Литература

1. *Poincaré H.* Sur les intégrales irrégulières: Des équations linéaires // *Acta Math.* – 1986. – Vol. 8. – P. 295–344.
2. *Nayfeh A.H.* *Perturbation Methods.* – New York: Wiley-Interscience, 1973. – 415 p.
3. *Мищенко Е.Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. – М.: Наука, 1975. – 248 с.
4. *Hinch E.J.* *Perturbation Methods.* – New York: Cambridge University Press, 1991. – 176 p.
5. *Бейкер Дж.* Аппроксимации Паде / *Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис.* – М.: Мир, 1986. – 502 с.
6. *Дородницын А.А.* Асимптотическое решение уравнения Ван дер Поля // *Прикл. матем. мех.* – 1947. – Т. 11, № 3. – С. 313–328.
7. *Жаров М.И., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* О некоторых специальных функциях и константах, возникающих в теории релаксационных колебаний // *Докл. АН СССР.* – 1981. – Т. 261, № 6. – С. 1292–1296.
8. *Amore P., Lamas H.M.* High order analysis of nonlinear periodic differential equations // *Physics Letters A.* – 2004. – Vol. 327, № 2–3. – P. 158–166.
9. *Amore P.* Computing the solutions of the van der Pol equation to arbitrary precision // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* – 2022. – Vol. 435. – 133279.
10. *Суетин С.П.* Численный анализ некоторых характеристик предельного цикла свободного уравнения Ван дер Поля // *Совр. пробл. матем., Том 14.* – М.: МИАН, 2010. – С. 3–57.
11. *Sazhin S.S., Shchepakina E., Sobolev V.* Critical phenomena in non-adiabatic combustion // *Combustion and Flame.* – 2022. – Vol. 245. – 112376.