

# ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ МНОГОМЕРНЫМИ СТАЦИОНАРНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Сидоров И.Г.

“Алгол-М”, Москва, Россия

igor8i2016@yandex.ru

*Аннотация.* В конструктивной форме в частотном представлении разработан оптимальный не упреждающий стохастический дискретный регулятор с обратной связью по состоянию, формируемый на различные виды внешних возмущений, когда спектральные плотности возмущений в канале измерений и в помехе измерений полностью неизвестны. Приводится иллюстрирующий пример.

*Ключевые слова:* факторизация, многомерный, стационарный, векторный случайный процесс, минимаксный линейный фильтр, неопределенность, матричная спектральная плотность, гарантирующая матричная частотная характеристика, управление, седловая точка.

## Введение

Задача управления и оценивания марковских процессов по наблюдениям за другим, связанным с ним процессом находилась в центре внимания исследователей многие годы [1-3], [10-14]. Ниже будет обсуждена общая формулировка этой задачи для случая линейных систем с постоянными параметрами и частотном синтезе адаптивного оптимального управления для частично наблюдаемых стохастических систем на случай произвольного конечного числа ограничений на спектральную плотность векторного возмущения и ошибок измерения, присутствующих в канале наблюдения векторного полезного сигнала. Проблематика рассматриваемой задачи тесно связана с факторизацией матричной спектральной плотности (МСП), которая возникает в задачах оптимальной стационарной линейной фильтрации и оптимального линейного управления [1-4]. В докладе описано обоснование того, что факторизация МСП необходима и для решения задачи оптимального линейного управления многомерными стационарными случайными процессами в условиях неопределённости их спектральных плотностей, она также возникает в теории минимаксной линейной фильтрации стационарных процессов [10]. В рамках теории линейной фильтрации и в её терминах проблема факторизации равноценна отысканию формирующего и обеливающего фильтра и, в конечном счёте, переходу от исходного наблюдаемого процесса к эквивалентному ему белому шуму, называемому фундаментальным процессом. Однако важным является получение решения задачи оптимального линейного управления с факторизацией именно для процессов с нерациональными спектрами, т. е., в конечном счёте, в общем случае. В отличие от универсального подхода, основанного на решении уравнений Риккати [1-2], предлагаемый ниже метод использует спектральные особенности синтезируемых систем, позволяя существенно упростить анализ и поиск линейного оптимального управления по неполным данным. Использование спектрального подхода для задач с одним управлением позволяет существенно упростить анализ и синтез оптимальных решений по сравнению с методами «2-Риккати» и LMI [11-14]. Такое упрощение имеет особый смысл при реализации алгоритмов адаптивной настройки законов управления для различных объектов в режиме реального времени.

## 1. Постановки задачи

Будем считать, что движение динамического объекта описывается векторным рекуррентным уравнением

$$X(n+1) = LX(n) + BU(n) + \zeta_1(n+1) + \zeta_2(n+1), X(0) = X_0 \quad (1)$$

$$\zeta_2(n) = \sum_{k=1}^N P_k [u_k(n)].$$

Наблюдаемый векторный случайный процесс  $Y(n)$  и выходной подлежащий оцениванию, процесс описывается стохастическим уравнением

$$Y(n+1) = CX(n) + DU(n) + \eta_1(n+1) + \eta_2(n+1), Y(0) = Y_0, \quad (2)$$

$$\eta_2(n) = \sum_{k=1}^M Q_k [v_k(n)]$$

и выражением  $W(n) = EX(n)$ .

Здесь:

$X(n)$  – вектор фазовых координат объекта;

$X(0)$  – случайный вектор начальных условий;

$Y(0)$  – случайный вектор;

$\zeta_1(n)$  – дискретный векторный белый шум, называемый далее шумом объекта;

$\zeta_2(n)$  – дискретный случайный векторный процесс с неизвестной матричной спектральной положительно определенной диагональной плотностью  $H_{x_c}(\lambda)$ , порожденный возмущениями  $u_k(n)$ , называемый шумом канала наблюдения;

$\eta_1(n)$  – дискретный векторный белый шум, называемый далее шумом канала измерений;

$\eta_2(n)$  – дискретный случайный векторный процесс с неизвестной матричной спектральной плотностью  $H_{y_c}(\lambda)$ , порожденный возмущениями  $v_k(n)$ ;

$P_k, Q_k, L, B, C, D, E$  – матрицы или матричные функции времени соответствующих размеров.

В уравнения (1.1) и (1.2) входит также векторный управляющий процесс  $U(n)$ , имеющий  $MU(n) = 0$  и ограниченные дисперсии компонент  $MU_i^2(n) = a_i^2$ . Корреляционные функции компонент процесса  $U(n)$  неизвестны. Будем при этом считать, что условия некоррелированности возмущающих процессов, шумов объекта и канала измерений наложены. Относительно матриц  $L, B, C$  сделаем следующие допущения:

1) система объект-измеритель (1.1), (1.2) является полностью наблюдаемой системой, т.е

$$\text{rang}(C, L^T C, \dots, (L^{n-1})^T C) = q,$$

где  $q$  размерность вектора состояния  $X(n)$  системы объекта (1).

2) система объект (1) является полностью управляемой системой, т.е

$$\text{rang}(B, LB, \dots, L^{n-1}B) = q.$$

Чтобы не усложнять изложение ограничимся в дальнейшем случае, когда управляемый сигнал и наблюдаемый содержат по одному возмущению, то есть

$$X(n) = X_0(n) + P[u(n)], Y(n) = Y_0(n) + Q[v(n)],$$

где  $X_0(n)$  и  $Y_0(n)$  имеют известные матрицы спектральных плотностей  $T_0$  и  $T_1$ , а спектральные диагональные неотрицательные плотности  $H_{x_c}(\lambda)$  и  $H_{y_c}(\lambda)$  процессов  $u$  и  $v$  удовлетворяют моментным векторным неравенствам

$$\int_{\Lambda_1} H_{x_c}(\lambda) \Phi_j d\lambda \leq b_j, j = 1, \dots, m_1, \quad (3)$$

$$\int_{\Lambda_1} H_{y_c}(\lambda) \Psi_j d\lambda \leq c_j, j = 1, \dots, m_2,$$

$$\mathbf{H}_{x_c}(\lambda) \geq 0, \mathbf{H}_{y_c}(\lambda) \geq 0,$$

где  $\Phi_j(\lambda) \in \bar{R}_+^{m_1}, \Psi_j(\lambda) \in \bar{R}_+^{m_2}$  – неотрицательные, четные по  $\lambda$  заданные векторные функции частоты;  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j$  – заданные неотрицательные постоянные вектора;

$R_+^n = \{x \in R^n \mid x_i > 0, i = 1, \dots, n\}$  – положительный ортант пространства  $R^n$ ;

$\bar{R}_+^n = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$  – неотрицательный ортант  $R^n$  (замыкание  $R_+^n$ ).

Физический смысл ограничений (3) состоит в том, что на определенные возмущения в системе объект-измеритель (1), (2), корреляционные функции которых точно неизвестны, однако известны верхние оценки их дисперсий и (или) дисперсий производных и т.п., наложены ограничения на их моменты и на области их сосредоточения спектра(ожидаемые полосы частот). На наблюдаемый процесс  $\mathbf{Y}(n)$  налагается лишь условие линейной регулярности максимального ранга, т. е. в терминах матричной спектральной плотности условие Пэли-Винера имеет аналогичный вид [5] для случая рациональной матричной спектральной плотности  $\mathbf{S}(\mu)$  относительно  $\mu$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln \det \mathbf{S}(\mu)}{1 + \mu^2} d\mu > \infty,$$

обеспечивающего представление – факторизацию

$$\mathbf{S}(\lambda) = \mathbf{F}(e^{-i\lambda})\mathbf{F}^*(e^{-i\lambda}),$$

где матричные функции  $\mathbf{F}(i\lambda)$  и  $\mathbf{F}^{-1}(i\lambda)$  – аналитические в нижней полуплоскости переменной  $\lambda$ , т. е. являются частотными характеристиками физически осуществимых (формирующего и обеливающего) фильтров, \* – знак сопряжения матриц.

Основываясь на разработанном ранее методе преобразования Гильберта в работе [6] для скалярного стационарного случайного процесса, оптимальную линейную оценку  $\hat{\mathbf{X}}(n)$  случайного вектора  $\mathbf{X}(n)$ , т. е. вектор  $\hat{\mathbf{X}}(n) = (\hat{X}_1(n), \dots, \hat{X}_q(n))$  ортогональных проекций  $\hat{X}_j(n) = \hat{M}(X_j(n) | H^Y(n))$  случайных величин  $X_j(n), j = 1, \dots, q$  на линейное подпространство  $H^Y(n)$ , порожденное случайными величинами  $Y_k(v), k = 1, \dots, m, v = -\infty, \dots, n$  определим как

$$\hat{\mathbf{X}}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \hat{\mathbf{G}}_v(e^{-i\lambda}) \tilde{\boldsymbol{\mu}}^X(d\lambda), \quad (4)$$

где  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{x_c}(d\lambda)$  – известная векторная ортогональная случайная мера процесса  $\mathbf{X}(n)$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{x_d}(d\lambda)$  – неизвестная векторная ортогональная случайная мера процесса  $\mathbf{X}(n)$ , взаимно некоррелированная с известной мерой  $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{x_c}(d\lambda)$ . В выражении (4)  $\hat{\mathbf{G}}_v(e^{-i\lambda})$  – матричная частотная характеристика (МЧХ) оптимального минимаксного линейного фильтра с учетом ограничений (3), наложенных на неизвестные матричные спектральные плотности процессов  $\mathbf{X}(n)$  и  $\mathbf{Y}(n)$ . Все векторные ортогональные случайные меры будем считать абсолютно непрерывными и стационарно связанными, а значит у них существуют матричные спектральные плотности.

Процессы  $\mathbf{X}(n)$  и  $\mathbf{Y}(n)$  имеют матричные спектральные плотности

$$\mathbf{S}(\lambda) = \mathbf{S}^{YY}(\lambda),$$

$$\mathbf{S}^{XX}(\lambda) = M\boldsymbol{\mu}^X(d\lambda)(\boldsymbol{\mu}^X(d\lambda))^* / d\lambda,$$

$$\mathbf{S}^{XY}(\lambda) = M\boldsymbol{\mu}^X(d\lambda)(\boldsymbol{\mu}^Y(d\lambda))^* / d\lambda,$$

$$S^{YY}(\lambda) = M |\mu^Y(d\lambda)|^2 / d\lambda.$$

Спектральные плотности  $S^{XX}(\lambda)$  и  $S^{YY}(\lambda)$  возможно представить в виде

$$S^{XX}(\lambda) = S_c^{XX}(\lambda) + H_{x_c}(\lambda) \quad (5)$$

$$S^{YY}(\lambda) = S_c^{YY}(\lambda) + H_{y_c}(\lambda).$$

Здесь  $S_c^{XX}, S_c^{YY}$  – известные положительные матричные спектральные плотности процессов  $X(n)$  и  $Y(n)$ , которые в общем случае не являются рациональными, а меры  $\mu_{x_c}(d\lambda), \mu_{y_c}(d\lambda)$  обладают свойством

$$M [d\mu_{x_c}(\lambda_1) d\mu_{x_c}^*(\lambda_2)] = H_{x_c}(\lambda_1) \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1,$$

$$M [d\mu_{y_c}(\lambda_1) d\mu_{y_c}^*(\lambda_2)] = H_{y_c}(\lambda_1) \delta(\lambda_1 - \lambda_2) d\lambda_1,$$

где  $H_{x_c}(\lambda), H_{y_c}(\lambda)$  – неизвестные положительно полуопределенные диагональные матричные функции, подчиняющиеся ограничениям вида (3). Вопрос факторизации МСП  $S^{YY}(\lambda)$  в ее представлении (5) в предположении о линейной регулярности максимального ранга ее известной составляющей  $S_c^{YY}(\lambda)$  в этом случае можно показать что, оптимальная оценка для минимаксного фильтра дается выражением [6]

$$\hat{G}_v(e^{-i\lambda}) = \left[ S^{XY}(\lambda) (F^{-1}(e^{i\lambda}))^* \right]_{PR} F^{-1}(e^{-i\lambda}) \quad (6)$$

в результате применения интегральных преобразований над матричной частотной характеристикой сглаживающего оптимального фильтра  $H_s(\lambda)$

$$H_s(\lambda) = S^{X\zeta}(\lambda) (S^{\zeta\zeta}(\lambda))^{-1} = S^{XY}(\lambda) (F^{-1}(e^{-i\lambda}))^*$$

процесса  $X(n)$  по фундаментальному процессу  $\zeta(n)$

$$\zeta(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \mathbf{v}(d\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} F^{-1}(e^{-i\lambda}) \mu^Y(d\lambda)$$

в виде

$$E(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\lambda n} H_s(\lambda) d\lambda, H_s(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\lambda n} E(n),$$

называемых сепарацией и обозначаемых  $H(e^{-i\lambda}) = [H_s(\lambda)]_{PR}$ .

Требуется найти линейное стационарное векторное управление  $U(n), U_j(n) \in H^Y(n), j = 1, \dots, r$ ,  $U_j(n) \in H^Y(n), j = 1, \dots, r$ , минимизирующее критерий качества управления

$$R = MX^T(n) Q X(n) \rightarrow \min_{U(n)}, \quad (7)$$

где  $Q$  – неотрицательно определенная матрица при ограничениях по дисперсии, наложенных на компоненты  $U_j(n)$  управляющего процесса  $U(n)$ ,

$$MU_j^2(n) \leq a_j^2, j = 1, \dots, r \quad (8)$$

и условиях не упреждаемости, наложенных на компоненты  $U_j(n)$  по отношению к наблюдаемому процессу  $Y(n)$ :  $U_j(n) \in H^Y(n), j = 1, \dots, r$ .

Пусть векторные стационарные случайные процессы  $X_0(n), Y_0(n)$  заданы точно, управляемый процесс  $X(n)$  и наблюдаемый  $Y(n)$  выражаются в виде

$$X(n) = X_0(n) + X^U(n), Y(n) = Y_0(n) + Y^U(n),$$

где  $X^U(n)$  и  $Y^U(n)$  – составляющие процессов  $X(n)$  и  $Y(n)$ , обусловленные векторным стационарным управляющим процессом  $U(n)$  и выражающиеся в виде

$$X^U(n) = \sum_{v=-\infty}^n B(n-v)U(v), Y^U(n) = \sum_{v=-\infty}^n D(n-v)U(v), \quad (9)$$

где  $B(n-v), D(n-v)$  матричные импульсные переходные функции (МИПФ) системы (1), (2).

Подставляя ортогональное разложение  $X(n) = \hat{X}(n) + \tilde{X}(n)$  в выражение для критерия (7), в результате получим, что  $R = \hat{R} + \tilde{R}$ , где  $\hat{R}(U) = M\hat{X}(n)Q\hat{X}(n)$  – средний риск управления,  $\tilde{R} = M\tilde{X}^T(n)Q\tilde{X}(n)$  – средний риск фильтрации. Поскольку  $\tilde{R}$  не зависит от управляющего процесса  $U(n)$ , то в соответствии с «принципом разделения» Вонэма [3, 7], задача оптимального управления сводится к минимизации  $\hat{R}(U)$ .

Пусть  $\nu(d\lambda)$  – векторная ортогональная фундаментальная случайная мера процесса  $Y(n)$ . Тогда процесс  $\hat{X}_0(n)$  будет иметь спектральное представление

$$\hat{X}_0(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \hat{G}_v(e^{-i\lambda}) \nu(d\lambda),$$

где  $\hat{G}_v(e^{-i\lambda})$  – МЧХ линейного минимаксного фильтра, оптимального по отношению к фундаментальному процессу  $\zeta(n)$ , а процесс  $U(n)$  будет иметь спектральное представление

$$U(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} H(e^{-i\lambda}) \hat{G}_v(e^{-i\lambda}) \nu(d\lambda), \quad (10)$$

Оптимальный линейный регулятор для стохастической системы (1), (2) будем искать в представлении (10), где  $H(e^{-i\lambda})$  – вектор МЧХ управляющего линейного звена (управляющего устройства) по отношению к процессу  $\hat{X}_0(n)$ .

Отсюда процесс  $\hat{X}(n)$  будет иметь спектральное представление

$$\hat{X}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \Delta(e^{-i\lambda}) G_v(e^{-i\lambda}) \nu(d\lambda),$$

По сути, задача свелась к нахождению дискретного регулятора во временной области в виде

$$\hat{U}(n) = \hat{K}(n) \hat{X}_0(n), \quad (11)$$

где  $\hat{K}(n)$  матрица коэффициентов усиления регулятора, имеющая в спектральном представлении вид

$$\hat{K}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \hat{H}_{opt}(e^{-i\lambda}) \nu(d\lambda) \quad (12)$$

### 1.1. Решение задачи оптимального управления

Для поиска оптимального решения далее рассматривается задача минимизации функционала Лагранжа риска управления по строке управления  $H^{(j)}(e^{-i\lambda})$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} Sp\{\Delta(e^{-i\lambda})N(\lambda)\Delta^*(e^{-i\lambda})\}d\lambda + \lambda_j \left( \int_{-\pi}^{\pi} H^{(j)}(e^{-i\lambda})N(\lambda)(H^{(j)}(e^{-i\lambda}))^* d\lambda - a_j^2 \right) \rightarrow \min_{H^{(j)}} \quad (13)$$

$$j = 1, \dots, r,$$

где введены обозначения  $\Delta(e^{-i\lambda}) = \mathbf{I} - \mathbf{B}(e^{-i\lambda})\mathbf{H}(e^{-i\lambda})$ ,  $N(\lambda) = \mathbf{G}_v(e^{-i\lambda})\mathbf{Q}\mathbf{G}_v^*(e^{-i\lambda})$ ,  $\lambda_j > 0$  –  $j$ -й множитель Лагранжа, соответствующий  $j$ -му ограничению(8).

Введем обозначение для подынтегральной функции функционала Лагранжа

$$\ell(\mathbf{H}^{(j)}, \lambda_j) = Sp \left\{ \Delta(e^{-i\lambda}) N(\lambda) \Delta^*(e^{-i\lambda}) \right\} + \lambda_j \left( \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{H}^{(j)}(e^{-i\lambda}) N(\lambda) (\mathbf{H}^{(j)})^*(e^{-i\lambda}) d\lambda - a_j^2 \right) \quad (14)$$

Уравнения Эйлера, соответствующие (14) можно записать в виде

$$\frac{\partial \ell(\mathbf{H}^{(j)}, \lambda_j)}{\partial \mathbf{H}^{(j)}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \ell(\mathbf{H}^{(j)}, \lambda_j)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (15)$$

Из соотношений (13) можно воспользоваться приемом нахождения минимума следа функционала Лагранжа риска управления с использованием операций матричного дифференцирования скалярной функции от матричного аргумента  $\mathbf{H}^{(j)}$ . В результате применения этих операций получаем оптимальный вектор управлений

$$\mathbf{H}_{opt}^{(j)} = \frac{\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})}{\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})\mathbf{B}^{(j)*}(e^{-i\lambda}) + \lambda_j^{opt}}; \quad j = 1, \dots, r, \quad (16)$$

где  $\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})$  – это  $j$ -я строка матрицы  $\mathbf{B}(e^{-i\lambda})$ . Заметим, что представление (16) корректно в смысле применения операции деления на выражение  $\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})\mathbf{B}^{(j)*}(e^{-i\lambda}) + \lambda_j^{opt}$ , так как последнее представляет собой скалярное выражение всегда отличное от нуля.

Искомый вектор множителей Лагранжа  $\lambda^{opt} = (\lambda_1^{opt}, \dots, \lambda_r^{opt})$  можно найти с помощью соотношений (8) после подстановки в них выражений (16) для оптимального вектора управлений  $\mathbf{H}_{opt}^{(j)}$ . В итоге оптимальные множители Лагранжа  $\lambda_j^{opt}$  можно найти из соотношений

$$\left( \frac{\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})}{\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})\mathbf{B}^{(j)*}(e^{-i\lambda}) + \lambda_j} \right) (\mathbf{G}_v(e^{-i\lambda})\mathbf{Q}\mathbf{G}_v^*(e^{-i\lambda})) \left( \frac{\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})}{\mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})\mathbf{B}^{(j)*}(e^{-i\lambda}) + \lambda_j} \right)^* = a_j^2 \quad (17)$$

Из соотношения (17) можно явно найти явно оптимальный множитель Лагранжа  $\lambda_j^{opt}$

$$\lambda_j^{opt} = \frac{\sqrt{ab_j}}{a_j} - b_j, \quad (18)$$

где  $a = \mathbf{G}_v(e^{-i\lambda})\mathbf{Q}\mathbf{G}_v^*(e^{-i\lambda})$  и  $b_j = \mathbf{B}^{(j)}(e^{-i\lambda})\mathbf{B}^{(j)*}(e^{-i\lambda})$  действительные числа.

Путем подходящего выбора весовой матрицы  $\mathbf{Q}$  в критерии оптимизации (7) всегда можно добиться выполнения условия положительности множителей Лагранжа.

**Теорема.** Необходимые и достаточные условия максимума критерия  $\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{G}_v, \mathbf{U}) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{X}}^T(\mathbf{n})\mathbf{Q}\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{n})$  в задаче нахождения детерминированного оптимального управления по неполным данным для отфильтрованного управляемого процесса  $\mathbf{X}(\mathbf{n})$  из наблюдаемого  $\mathbf{Y}(\mathbf{n})$  совпадают с необходимыми и достаточными условиями существования седловой точки в задаче отыскания минимаксного линейного фильтра  $\hat{\mathbf{G}}_v$  с функцией выигрыша  $\mathbf{R}(\mathbf{G}_v, \mathbf{U}) = \mathbf{M}\hat{\mathbf{X}}^T(\mathbf{n})\mathbf{Q}\hat{\mathbf{X}}(\mathbf{n})$  в явной форме при ограниченных моментах второго порядка управляющих воздействий  $\mathbf{U}(\mathbf{n})$  по неполным данным в условиях неполной информации о нерациональных спектральных характеристиках возмущающих процессов, действующих на линейный динамический объект и присутствующих в канале измерений.

Доказательство этой теоремы опущено из-за ограничений на размер статьи. Для найденного минимаксного фильтра  $\hat{\mathbf{G}}_v$  решаем задачу оптимального управления.

## 2. Синтез оптимального наблюдателя и субоптимального регулятора с помощью фильтра Калмана

Пусть не все переменные состояния объекта (1) доступны непосредственному измерению и пусть кроме того измерения осуществляются с помехами типа “белого шума” в условиях линейной регулярности максимального ранга.

$$X(n+1) = LX(n) + BU(n) + \zeta_1(n+1) + \zeta_2(n+1), X(0) = X_0,$$

$$\zeta_2(n) = \sum_{k=1}^N P_k [u_k(n)], \quad (19)$$

где  $\zeta_1(n), \zeta_2(n)$  – стационарные некоррелированные между собой процессы с  $M\zeta_1(n) = 0, M\zeta_2(n) = 0, M\zeta_1(n)\zeta_2(n) = 0$  с нерациональными в общем случае спектральными плотностями  $S_1(\lambda)$  и  $S_2(\lambda)$ , а наблюдаемый процесс  $Y(n)$  выражается в виде

$$Y(n) = C^T X(n) + \zeta_1(n) + \zeta_2(n+1), Y(0) = Y_0,$$

$$S_1(\lambda) = M\zeta_1^2(n) = \tau^2 \leq a_1^2, \quad (20)$$

$$S_2(\lambda) = M\zeta_2^2(n) \leq a_2^2.$$

Предполагается, что система объект-измеритель (19), (20) в отсутствие ошибок измерения и возмущений наблюдаема и управляема. Оптимальный стохастический регулятор с обратной связью по состоянию, формирующий искомое управление состоит из двух частей: устройства реализующего оптимальный закон управления в виде

$$\hat{U}(n) = \hat{K}(n)\hat{X}_0(n), \quad (21)$$

где оценка  $\hat{X}_0(n)$  вырабатывается во втором устройстве восстановления (наблюдения, фильтрации) – оптимальном наблюдателе ( фильтре Калмана – Бьюси [8]). Как и в детерминированном случае наблюдатель по форме фильтра Калмана описывается в установившемся режиме уравнением [9] в виде

$$\hat{X}(n+1) = L\hat{X}(n) + K_{xx}C[Y(n) - C\hat{X}(n)] + B \sum_{k=-\infty}^n Z(n-k)C[Y(k) - C^T\hat{X}(k)], \quad (22)$$

где  $\hat{K}(n) = K_{xx}(n)C$  – искомая оптимальная матрица усиления регулятора, а корреляционная матрица  $K_{xx}(n)$  процесса  $X(n)$  отнесенная к  $\tau^2$  удовлетворяет уравнению в установившемся режиме

$$LK_{xx} + K_{xx}L^T + KB^T + BK^* - K_{xx}CC^TK_{xx} = 0, \quad (23)$$

где  $Z(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda k} Z_+(\lambda) d\lambda$  – оригинал изображения  $Z_+(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k e^{-i\lambda k}$ , собой физически

реализуемый фильтр  $Z(\lambda) = K_{\lambda x} C$ ,  $K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{K}_{\lambda x} d\lambda$ , где  $\bar{K}_{\lambda x}$  удовлетворяет уравнению

$$(i\lambda I - A + K_{xx}CC^T)\bar{K}_{\lambda x} = b \frac{h(\lambda)}{\tau^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b \frac{\bar{K}_{\lambda_1 x}}{i(\lambda - \lambda_1)} CC^T d\lambda_1 \bar{K}_{\lambda x}. \quad (24)$$

Конструктивный способ, позволяющий определить интеграл  $K$  описан подробно в монографии [9, с.171]. Если нужно определить качество фильтрации, характеризуемое диагональными моментами корреляционной матрицы  $K_{xx}$ , то решение системы (23) упрощается и сводится к решению линейной системы вида

$$AK_{xx} + K_{xx}A = Y$$

### 3. Пример синтеза оптимального управления

Приведем пример применения предлагаемого метода к решению задачи оптимального управления координат динамического объекта — положения и скорости, когда движение объекта описывается рекуррентными уравнениями

$$X_1(n+1) = X_1(n) + hX_2(n) + \frac{h^2}{2}U_1(n) + U_2(n), \quad (25)$$

$$X_2(n+1) = X_2(n) + hU_1(n) + U_2(n),$$

где  $h$  — длительность любого  $n$ -го такта,  $U_1(n), U_2(n)$  — стационарные процессы ( $MU_1(n) = 0, MU_2(n) = 0$ ) с нерациональными в общем случае спектральными плотностями  $S_1(\lambda)$  и  $S_2(\lambda)$ , а наблюдаемый процесс  $Y(n)$  выражается в виде

$$\begin{aligned} Y(n) &= X_1(n) + \eta(n+1) + U_2(n), Y(0) = Y_0, \\ S_1(\lambda) &= MU_1^2(n) \leq a_1^2, \\ S_2(\lambda) &= MU_2^2(n) \leq a_2^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\eta(n)$  — дискретный белый шум с дисперсией  $\tau^2 = M\eta^2$ . С учетом ограничения (26) на неизвестную компоненту  $U_1(n)$  — управляющее возмущение в помехе канала измерений, найдем оптимальный минимаксный фильтр  $\hat{G}_v$  методом факторизации и наихудшую спектральную плотность компоненты  $U_2(n)$  для процесса  $\hat{X}_0(n)$ . Воспользовавшись результатом решения аналога этого примера, приводимого в монографии Куркина [9, пример 3.10] для нахождения спектральной наихудшей плотности компоненты  $U_2(n)$ , будем иметь ее аналитическое представление в виде

$$h_2(\lambda) = \begin{cases} a_2^2 / [2(\pi - \lambda_0)] & \text{при } |\lambda| \geq \lambda_0; \\ 0 & \text{при } |\lambda| < \lambda_0. \end{cases}$$

Частотные характеристики от входа  $U_1(n)$  до выходов  $X_1(n) = x(n), X_2(n) = \dot{x}(n)$  и  $X^T(n) = [x(n), \dot{x}(n)]$  имеют вид

$$C_1(e^{i\lambda}) = \frac{h^2 e^{i\lambda} + 1}{2 e^{i\lambda} - 1}, C_2(e^{i\lambda}) = \frac{h}{e^{i\lambda} - 1}, C(e^{i\lambda}) = \begin{bmatrix} C_1(e^{i\lambda}) \\ C_2(e^{i\lambda}) \end{bmatrix}.$$

Спектральные плотности фильтруемого и наблюдаемого процессов

$$S^{XX}(\lambda) = C(e^{i\lambda})S_1(\lambda)C^*(e^{i\lambda}), S(\lambda) = |C_1(e^{i\lambda})|^2 S_1(\lambda) + h_2(\lambda) + \tau^2,$$

а их взаимная спектральная плотность

$$S^{XY}(\lambda) = C(e^{i\lambda})S_1(\lambda)C_1(e^{i\lambda}).$$

На втором этапе решим задачу факторизации МСП  $S(\lambda)$  воспользовавшись теоремой 2 (о факторизации МСП) из работы Голубева Г.А. [6]. Решение задачи факторизации МСП  $S(\lambda)$  состоит в расчете матричных функций  $A_l(\lambda) = S^{1/2}(\lambda), \ln A_l(\lambda)$  и затем в расчете  $\Phi(\lambda)$  как матричного преобразования Гильберта  $\ln A_l(\lambda)$  и формирования МЧХ фильтра  $F(e^{-i\lambda})$  и  $F^{-1}(e^{-i\lambda})$

по формулам:  $F(e^{-i\lambda}) = A_i(\lambda) \exp(i\Phi(\lambda))$ ,  $F^{-1}(e^{-i\lambda}) = \exp(-i\Phi(\lambda)) A_i^{-1}(\lambda)$ , а на третьем этапе воспользуемся формулой (6) и найдем выражение для физически реализуемого минимаксного фильтра  $\hat{G}_v$ . Наконец на четвертом этапе определим оптимальное управление (регулятор) фильтруемого процесса  $X(n)$  в виде (16)

$$\mathbf{H}_{opt}(e^{-i\lambda}) = [\mathbf{B}(e^{-i\lambda}) \mathbf{B}^*(e^{-i\lambda}) + \lambda_{opt}]^{-1} \mathbf{B}(e^{-i\lambda}),$$

$$\mathbf{B}(e^{i\lambda}) = \begin{bmatrix} C_1(e^{i\lambda}) \\ C_2(e^{i\lambda}) \end{bmatrix}, \lambda_{opt} = \frac{\sqrt{ba}}{a_2} - b = \left[ h \cdot ctg \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\lambda}{2}}} \right] \left[ \frac{1}{a_2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{h^4}{4} ctg^2 \frac{\lambda}{2} \cdot a_1^2 + \frac{a_2^2}{2(\pi - \lambda_0)} + \tau^2}}{h \cdot ctg \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{h^2}{4} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\lambda}{2}}}} - 1 \right],$$

$$a = \mathbf{G}_v(e^{-i\lambda}) \mathbf{Q} \mathbf{G}_v^*(e^{-i\lambda}), b = \mathbf{B}(e^{-i\lambda}) \mathbf{B}^*(e^{i\lambda}) = |\mathbf{B}(e^{-i\lambda})|^2 = h^2 ctg^2 \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{h^2}{4} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\lambda}{2}} \right].$$

Матрица ковариаций ошибки восстановления ( фильтрации )  $e(n) = X(n) - \hat{X}(n)$  будет иметь вид

$$\mathbf{K} = \mathbf{M} e(n) e^T(n) = \int_{-\pi}^{\pi} (\mathbf{S}^{XX} - \mathbf{G}_v^*(e^{i\lambda}) \mathbf{S}(\lambda) \mathbf{G}_v(e^{i\lambda})) d\lambda \quad (27)$$

Для приближенной оценки параметра  $\hat{a}$  в установившемся режиме воспользуемся свойством асимптотически устойчивости объекта управления, то есть поскольку ошибка восстановления с течением времени будет уменьшаться  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = \mathbf{0}$ , то из последнего соотношения для ковариаций матрицы при выборе весовой матрицы  $\mathbf{Q} = \mathbf{S}(\lambda) = |C_1(e^{i\lambda})|^2 S_1(\lambda) + h_2(\lambda) + \tau^2$ , следует, что субоптимальная оценка параметра  $\hat{a}$  может быть представлена в виде следа спектральной плотности ошибки восстановления  $Sp \mathbf{S}_{xx}$

$$\begin{aligned} \hat{a} &\approx Sp(\mathbf{G}_v(e^{i\lambda}) \mathbf{S}(\lambda) \mathbf{G}_v^*(e^{i\lambda})) = |\mathbf{G}_v(e^{i\lambda})|^2 S(\lambda) = Sp \mathbf{S}_{xx} = \\ &= S_1 \cdot h^2 ctg^2 \frac{\lambda}{2} \left[ \frac{h^2}{4} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\lambda}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Необходимые параметры оптимального регулятора найдены. Графики изменения ковариации ошибки скорости  $X_2(n) = \dot{x}(n)$  по времени для квазиоптимального регулятора, изображены на рис. 1.: 1 – по методу факторизации спектральной плотности; 2 – по методу фильтра Калмана при  $h=1$ ,  $\tau^2 = 25$ ,  $a_1^2 = 25$ ,  $a_2^2 = 25$ . Начальные значения матрицы  $\mathbf{K}_{xx}(0)$  были выбраны исходя из близких к ним оценок по скорости  $\dot{x}(n)$ , полученным в примере близким по содержанию модели, рассматриваемой в нашем примере, который представлен в работе Куркина [9, с. 175] и имеют вид

$$K_{xx}(0) = \gamma \lambda_0, K_{\dot{x}\dot{x}}(0) = \lambda_0^3 [\gamma^3 / 6 + (1 + 6\gamma^2) / (9\pi)], K_{x\dot{x}}(0) = \gamma^2 \lambda_0^2 / 2, \text{ где параметр } \gamma, \text{ находится из соотношения}$$

$$\frac{1}{\gamma} tg \frac{1}{\gamma} = 1, \lambda_0^2 = \frac{15}{4} \cdot \frac{(\gamma^2 + 1)}{(1 + 6\gamma^2)} \cdot \frac{a_2}{\tau^2}.$$

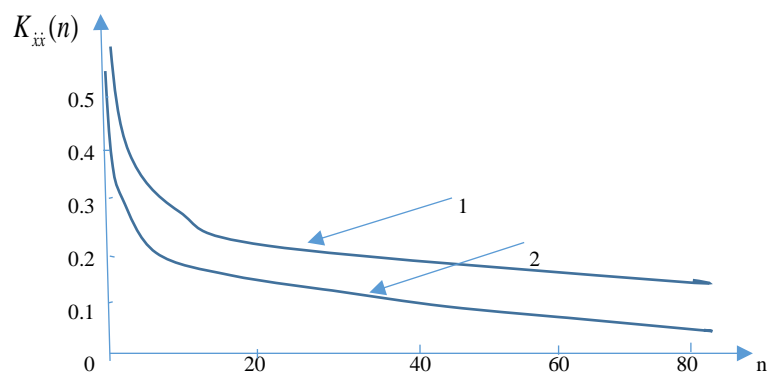


Рис. 1. Изменение ковариации ошибки скорости по времени для квазиоптимального регулятора: 1 – по методу факторизации спектральной плотности; 2 – по методу фильтра Калмана

Из построенных графиков видно, что проигрыш по точности определения ковариации ошибки скорости спектрального регулятора по сравнению с регулятором – фильтром Калмана-Бьюси составляет примерно 10%, что обычно допустимо на практике. Из полученных выше соотношений видно, что построение оптимального многомерного регулятора в условиях неопределенности спектральных плотностей как наблюдаемого, так и измеряемого многомерных дискретных марковских стационарных процессов управляемого многомерного динамического объекта методом факторизации спектральной плотности может быть реализовано на ЭВМ с применением вычислительной математики.

#### 4. Заключение

1. В конструктивной форме в частотном представлении разработан оптимальный не упреждающий регулятор  $H^2$ , формируемый на различные виды внешних возмущений, в том числе и окрашенных, присутствующих как в полезном сигнале так и в помехе измерений, для которых известны лишь моментные неравенства и области их сосредоточения. В перспективе также возможен и синтез частотного робастного не упреждающего регулятора в условиях нечеткости линейной динамической системы, присутствующей, в частности, в матрице состояния системы.

2. Предложенный спектральный подход позволил сформировать новый метод решения синтеза оптимального среднеквадратичного минимаксного асимптотически устойчивого линейного регулятора по неполным данным, который основан на алгоритме, содержащем конечное число простых алгебраических операций. Предложенный метод не использует универсальную технику – оптимального синтеза, связанную с решением уравнений Риккати или линейных матричных неравенств. Это снимает трудности, вызванные вырожденностью задачи, и позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты, что имеет особую значимость для адаптивной перенастройки систем обработки сигналов и управления, работающих в режиме реального времени.

#### Литература

1. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. М.: Наука, 1974.
2. Lai C.-T., Fang C.-H., Kau S.-W., Lee C.-H. Robust  $H^2$  control of Norm-Bounded Uncertain Continuous-Time System – an LMI Approach // Proc. 2004 IEEE Int.Sympos. on Computer Aided Control Systems Design. Taipei, Taiwan. September 2004. – P. 243–248.
3. Tryphon T. Georgiou, Anders Lindquist. The Separation Principle in Stochastic Control, Redux // IEEE Transactions on automatic control. – 2013. – Vol.58, № 10, October. – P. 2481–2494.
4. Лямпе Б.П., Розенвассер Е.Н. Факторизация рациональных матриц в задачах синтеза импульсных систем // АиТ. 2001. – Выпуск 6. – С. 69–84.
5. Розанов Ю.А. Стационарные случайные процессы. Изд. второе. – М.: Наука, 1990.
6. Голубев Г.А. Факторизация матричной спектральной плотности и матричной передаточной функции в задачах оптимизации линейных систем // Изв. АН. Теория и системы управления. – 1996. – № 1. – С. 91–98.
7. Голубев Г.А. Параметрическое разложение (факторизация) матричной спектральной плотности и матричной передаточной функции в задачах оптимизации линейных систем с дискретным временем // АиТ. – 1996. – выпуск 6. – С. 29–42.
8. Куржанский А.В. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977.

9. *Kalman R.E., Bucy R.S.* New results in linear filtering and prediction theory // Trans. ASME Ser. D. J. Basic Eng. – 1961. – V. 83. – P. 95–108.
10. *Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.А.* Минимаксная обработка информации. – М.: Энергоатомиздат, 1990.
11. *Кульба В.В., Чернов Ю.М.* Синтез подсистемы наблюдения для беспилотного летательного аппарата при неопределенных внешних воздействиях // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2019): труды Девятнадцатой междунар. конф: М.: ИПУ РАН, 2019. – С. 366–313.
12. *Веремей Е.И.* Спектральный подход к оптимизации систем управления по нормам пространств. Вестник Санкт-Петербургского университета. – 2004. – Серия 10. – Вып. 1.
13. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
14. *Peaucelle D., Fradkov A.L.* Robust adaptive  $L_2$ -gain control of polytopic MIMO LTI systems – LMI results, Syst. & Control Lett. 2008. – 57. – P. 881–887.
15. *Посель Д., Хан Х.М., Пакишин П.В.* Анализ робастного адаптивного управления для линейных систем с нестационарной неопределенностью на основе линейных матричных неравенств // АиТ. – 2009. – Выпуск 9. – С. 113–127.