

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ СПУТНИКА С ПОЛУПАССИВНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ В МАГНИТО-ЛОРЕНЦЕВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ<sup>1</sup>

Лозовой А.С., Тихонов А.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия  
st106433@student.spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

*Аннотация.* Рассматривается искусственный спутник Земли с электродинамической системой управления угловой ориентацией. Изучается режим стабилизации спутника в магнито-лоренцевой системе координат. Решается задача аналитического построения программного движения спутника в режиме полупассивного управления. С применением метода комплексной автономизации получено решение в виде отрезков тригонометрических рядов.

*Ключевые слова:* искусственный спутник Земли, электродинамическое управление, магнито-лоренцева система координат, стабилизация, колебания, компьютерное моделирование.

## Введение

Для искусственных спутников Земли (ИСЗ), испытывающих воздействие многочисленных силовых факторов, проблема аналитического описания установившихся колебательных режимов в той или иной базовой системе координат является практически важной для правильной обработки поступающей с ИСЗ измерительной информации [1].

Для ИСЗ, взаимодействующих с геомагнитным полем и оборудованных магнитными системами управления (МСУ) [2, 3], в качестве базовых могут использоваться орбитальная, кенигова, а также магнито-скоростная система координат. Лоренцевы системы управления (ЛСУ) [4], похожие на МСУ по характеру генерируемых управляющих моментов и опирающиеся на использование моментов сил Лоренца, также основаны на использовании взаимодействия ИСЗ с геомагнитным полем [5]. В данной работе рассматривается спутник с интегрированной электродинамической системой управления, представляющей собой синтез МСУ и ЛСУ [6]. Одновременное использование возможностей МСУ и ЛСУ позволяет снять характерные ограничения, присущие как МСУ, так и ЛСУ по-отдельности.

Естественной системой координат для стабилизации ИСЗ с помощью электродинамической системы управления является магнито-лоренцева система координат [7]. Эта вращающаяся базовая система координат, связанная с вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$  геомагнитного поля, силой Лоренца и орбитальной скоростью центра масс ИСЗ, представляется удобной для реализации некоторых режимов сканирования поверхности Земли. В работе [8] изучен вопрос об электродинамической стабилизации ИСЗ в магнито-лоренцевой системе координат. Однако, не рассмотрен вопрос о пассивной реализации режима ориентированного движения ИСЗ в магнито-лоренцевой системе координат, являющейся естественной для электродинамического метода управления угловым движением ИСЗ. В данной работе, направленной на рассмотрение этого вопроса, ставится цель построения аналитического решения неавтономных дифференциальных уравнений, описывающих малые колебания ИСЗ, пассивно стабилизированного в магнито-лоренцевой системе координат. При этом развивается новая методика построения установившихся колебательных режимов ИСЗ, ранее не применявшаяся в задачах динамики углового движения ИСЗ. Построенное аналитическое решение демонстрирует хорошее совпадение с результатами компьютерного моделирования.

## 1. Математическая модель задачи

Рассмотрим движение ИСЗ, несущего постоянный электрический заряд  $Q$  и имеющий магнитный момент  $\mathbf{I}$ , направленный вдоль одной из главных осей инерции, и симметричное распределение масс: все главные моменты инерции равны  $A = 1500 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Обозначим центр масс ИСЗ как  $C$ , а центр Земли как  $O$ . ИСЗ движется по круговой экваториальной орбите. Обозначим  $\omega_e = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$  – величину угловой скорости суточного вращения Земли,  $\omega_0 = 0,001078 \text{ рад/с}$  – величину угловой скорости орбитального движения ИСЗ,  $\mu$  – гравитационный параметр Земли.

Введем систему координат  $OXYZ$ , жестко связанную с Землей: ось  $Z$  направлена из центра Земли к географическому северному полюсу, оси  $X$  и  $Y$  расположены в экваториальной плоскости. Вместе с тем мы будем использовать орбитальную систему координат  $C\xi\eta\zeta$ , где ось  $\zeta$  направлена по вектору

<sup>1</sup>Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00104, <https://rscf.ru/project/24-21-00104/>

$\vec{OC}$ , ось  $\xi$  лежит в плоскости орбиты и направлена в сторону движения ИСЗ, а ось  $\eta$  – дополняющая до правой тройки. Главные оси инерции –  $Cxuz$ . Колебания ИСЗ будут рассматриваться в магнито-лоренцевой системе координат с ортами  $\mathbf{w}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$  векторов  $\mathbf{W} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}, \mathbf{T} = \mathbf{v}'_c \times \mathbf{B}$ , где  $\mathbf{v}'_c$  – скорость ИСЗ относительно магнитного поля Земли,  $\mathbf{B}$  – вектор магнитной индукции. Положение ИСЗ (с осями  $Cxuz$ ) в магнито-лоренцевой системе координат  $Cwbt$  будем задавать самолетными углами  $\varphi, \theta, \psi$ .

В качестве модели МПЗ примем модель “наклонного магнитного диполя” с вектором магнитной индукции  $\mathbf{B} = (1/R^3)(3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{R})\mathbf{R} - R^2 \cdot \mathbf{m})$ , где  $\mathbf{m}$  – магнитный момент диполя, имеющий компоненты  $m_x = R_3^3 g_1^1$ ,  $m_y = R_3^3 h_1^1$ ,  $m_z = R_3^3 g_1^0$ , в которых  $g_1^1, h_1^1, g_1^0$  – гауссовы коэффициенты,  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор центра масс ИСЗ, а  $R_3$  – радиус Земли.

Момент, создаваемый при помощи управления в его полупассивном варианте в линейном приближении, в проекциях на главные центральные оси инерции имеет вид:

$$\begin{cases} M_x = -(k_{M_0} + k_{L_0})\varphi - (h_{M_0} + h_{L_0})\dot{\varphi} \\ M_y = -k_{L_0}\theta - h_{L_0}\dot{\theta} \\ M_z = -k_{M_0}\psi - h_{M_0}\dot{\psi} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $k_{M_0} = Qk_M|\mathbf{B}|^2$ ,  $k_{L_0} = Qk_L|\mathbf{T}|^2$ ,  $h_{M_0} = Qh_M|\mathbf{B}|^2$ ,  $h_{L_0} = Qh_L|\mathbf{T}|^2$ ,  $k_M = 3,725 \cdot 10^7$ ,  $k_L = 153$ ,  $h_L = 3800$ ,  $h_M = 9,3 \cdot 10^7$ .

После перехода к безразмерному времени  $\gamma = (\omega_0 - \omega_e)t$  система дифференциальных уравнений, описывающая движение ИСЗ вокруг центра масс, принимает вид:

$$\begin{cases} \varphi'' + H_M(1 + \Delta_1 \cos^2 \gamma)\varphi' + H_L(1 + \Delta_2 \cos^2 \gamma)\varphi' - G_3\theta' + G_2\psi' + \\ \quad + K_M(1 + \Delta_1 \cos^2 \gamma)\varphi + K_L(1 + \Delta_2 \cos^2 \gamma)\varphi + G'_1 = 0 \\ \theta'' + G_3\varphi' + H_L(1 + \Delta_2 \cos^2 \gamma)\theta' - G_1\psi' + K_L(1 + \Delta_2 \cos^2 \gamma)\theta - G'_1\psi + G'_2 = 0 \\ \psi'' - G_2\varphi' + H_M(1 + \Delta_1 \cos^2 \gamma)\psi' + G_1\theta' + K_M(1 + \Delta_1 \cos^2 \gamma)\psi + G'_1\theta + G'_3 = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где безразмерные величины равны  $H_M = 0,3185$ ,  $H_L = 0,3587$ ,  $K_L = 14,3707$ ,  $K_M = 12,6911$ ,  $\Delta_1 = 0,09510$ ,  $\Delta_2 = 0,130958$  для выбранных значений параметров. А функции  $G_i$  – периодические, частично разложенные в ряды Фурье с точностью до 7 знака:

$$\begin{aligned} G_1 &= S_1^1 \sin \gamma + S_1^3 \sin 3\gamma + S_1^5 \sin 5\gamma + S_1^7 \sin 7\gamma = 0 \\ G_2 &= C_2^0 + C_2^2 \cos 2\gamma + C_2^4 \cos 4\gamma + C_2^6 \cos 6\gamma + C_2^8 \sin 8\gamma = 0 \\ G_3 &= C_3^1 \cos \gamma + C_3^3 \cos 3\gamma + C_3^5 \cos 5\gamma + C_3^7 \sin 7\gamma = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Притом  $S_1^1 = -0,5324$ ,  $S_1^3 = -0,0142$ ,  $S_1^5 = -0,000385$ ,  $S_1^7 = 0,0000105$ ,  $C_2^0 = 1,0008$ ,  $C_2^2 = 0,00872$ ,  $C_2^4 = -0,00094$ ,  $C_2^6 = 0,0000395$ ,  $C_2^8 = -1,5603 \cdot 10^{-6}$ ,  $C_3^1 = -0,5472$ ,  $C_3^3 = 0,01242$ ,  $C_3^5 = -0,000348$ ,  $C_3^7 = 9,887 \cdot 10^{-6}$  для выбранных значений параметров.

## 2. Аналитическое исследование дифференциальной системы

Мы будем искать приближенное периодическое решение, соответствующее установившемуся режиму колебаний. Для этого введем замену переменных:  $y_1 = e^{i\gamma}$ ,  $y_2 = e^{-i\gamma}$ . Далее записываем  $\cos \gamma = (y_1 + y_2)/2$ ,  $\sin \gamma = (y_1 - y_2)/(2i)$ . Теперь левая часть дифференциальной системы зависит лишь от переменных  $y_1, y_2, \varphi, \varphi', \theta, \theta', \psi, \psi'$  и не зависит от безразмерного времени  $\gamma$ . Для получения приближенного решения мы будем считать переменные  $y_1, y_2$  независимыми. Выпишем первые члены разложения в степенные ряды уравнений системы (2):

$$\begin{cases} \varphi'' + (A_L + A_M)\varphi' + C_2^0\psi' + (P_L + P_M)\varphi' + \varphi'(y_1^2 + y_2^2)(B_L + B_M)/2 + \dots = 0 \\ \theta'' + A_L\theta' + P_L\theta' + \varphi'(y_1 C_3^1/2 + y_1^3 C_3^3/2) + \dots = 0 \\ \psi'' - \varphi' C_2^0 + A_M\psi' + P_L\psi' - \varphi' \left( \frac{y_1^2 C_2^2}{2} + \frac{y_2^2 C_2^2}{2} \right) + \dots = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Приближенное решение системы (4) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} (\varphi, \theta, \psi)^T &= A_{10}y_1 + A_{01}y_2 + A_{20}y_1^2 + A_{11}y_1y_2 + A_{02}y_2^2 + A_{30}y_1^3 + A_{21}y_1^2y_2 + A_{12}y_1y_2^2 + \\ &+ A_{03}y_2^3 + A_{40}y_1^4 + A_{31}y_1^3y_2 + A_{22}y_1^2y_2^2 + A_{13}y_1y_2^3 + A_{04}y_2^4 + A_{50}y_1^5 + A_{41}y_1^4y_2 + \\ &+ A_{32}y_1^3y_2^2 + A_{23}y_1^2y_2^3 + A_{14}y_1y_2^4 + A_{05}y_2^5, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_{ik} = (\Phi_{ik}, \Theta_{ik}, \Psi_{ik})^T$  – вектор-коэффициенты.

После подстановки (5) в (4) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях в мономах  $y_1^i y_2^k$ , мы получим линейные системы уравнений, позволяющие определить коэффициенты  $A_{ik}$ . Эти системы не будут образовывать бесконечную систему взаимосвязанных алгебраических уравнений. Системы, полученные приравниванием членов порядка  $i + k = m$  будут содержать в себе только коэффициенты  $A_{ik}$  порядка не больше  $m$ . Это позволяет выразить последующие коэффициенты через предыдущие и, таким образом, находить приближение сколь угодно большого порядка. Приведем несколько полученных систем:

$$\begin{cases} \Phi_{10}(-1 + i(A_L + A_M) + (P_L + P_M)) + \Psi_{10} i + C_2^0 \frac{S_1^1}{2} = 0 \\ \Theta_{10}(-1 + iA_L + P_L) = 0 \\ \Psi_{10}(-1 - iA_M + P_M) + iC_2^0 \Phi_{10} + \frac{iC_3^1}{2} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \Phi_{20}(-4 + 2i(A_L + A_M) + (P_L + P_M)) + 2i\Psi_{20}C_2^0 = 0 \\ \Theta_{20}(-4 + 2iA_L + P_L) + \frac{i\Phi_{10}C_3^1}{2} - \Psi_{10}S_1^1 + iC_2^2 = 0 \\ \Psi_{20}(-4 + 2iA_M + P_M) - 2iC_2^0\Phi_{20} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Система (6) позволяет найти  $A_{10}$ , в ней не участвуют коэффициенты порядка 1 и выше. Также будет и для всех систем первого порядка. Система (7) позволяет найти  $A_{20}$ , зная все коэффициенты первого порядка. Та же закономерность будет прослеживаться и для остальных линейных систем.

Решая все системы, мы увидим, что будет выполнено  $\overline{A_{ik}} = A_{ki}$ , что соответствует вещественности полученного решения. Используя это, решение можно записать в вещественном виде:

$$\begin{aligned} & 2\{-\sin(\gamma) \operatorname{Im}(A_{1,0} + A_{2,1} + A_{3,2}) + \cos(\gamma) \operatorname{Re}(A_{1,0} + A_{2,1} + A_{3,2}) + \\ & \quad + \cos(2\gamma) \operatorname{Re}(A_{2,0} + A_{3,1}) - \sin(2\gamma) \operatorname{Im}(A_{2,0} + A_{3,1}) + \\ & \quad + \cos(3\gamma) \operatorname{Re}(A_{3,0} + A_{4,1}) - \sin(3\gamma) \operatorname{Im}(A_{3,0}) + \cos(4\gamma) \operatorname{Re}(A_{4,0}) - \sin(4\gamma) \operatorname{Im}(A_{4,0} + A_{4,1}) - \\ & \quad - \sin(5\gamma) \operatorname{Im}(A_{5,0}) + \cos(5\gamma) \operatorname{Re}(A_{5,0})\} + \operatorname{Re}(A_{1,1} + A_{2,2}). \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. Компьютерное моделирование и сравнение

Построение численного решения неавтономной системы (2) осуществлено методом Эйлера на отрезке  $[0; 60\pi]$ . Для тех же начальных условий построено численное решение, соответствующее аналитическому решению (8). На рисунке 1 показаны фазовые траектории построенных аналитического и численного решений.

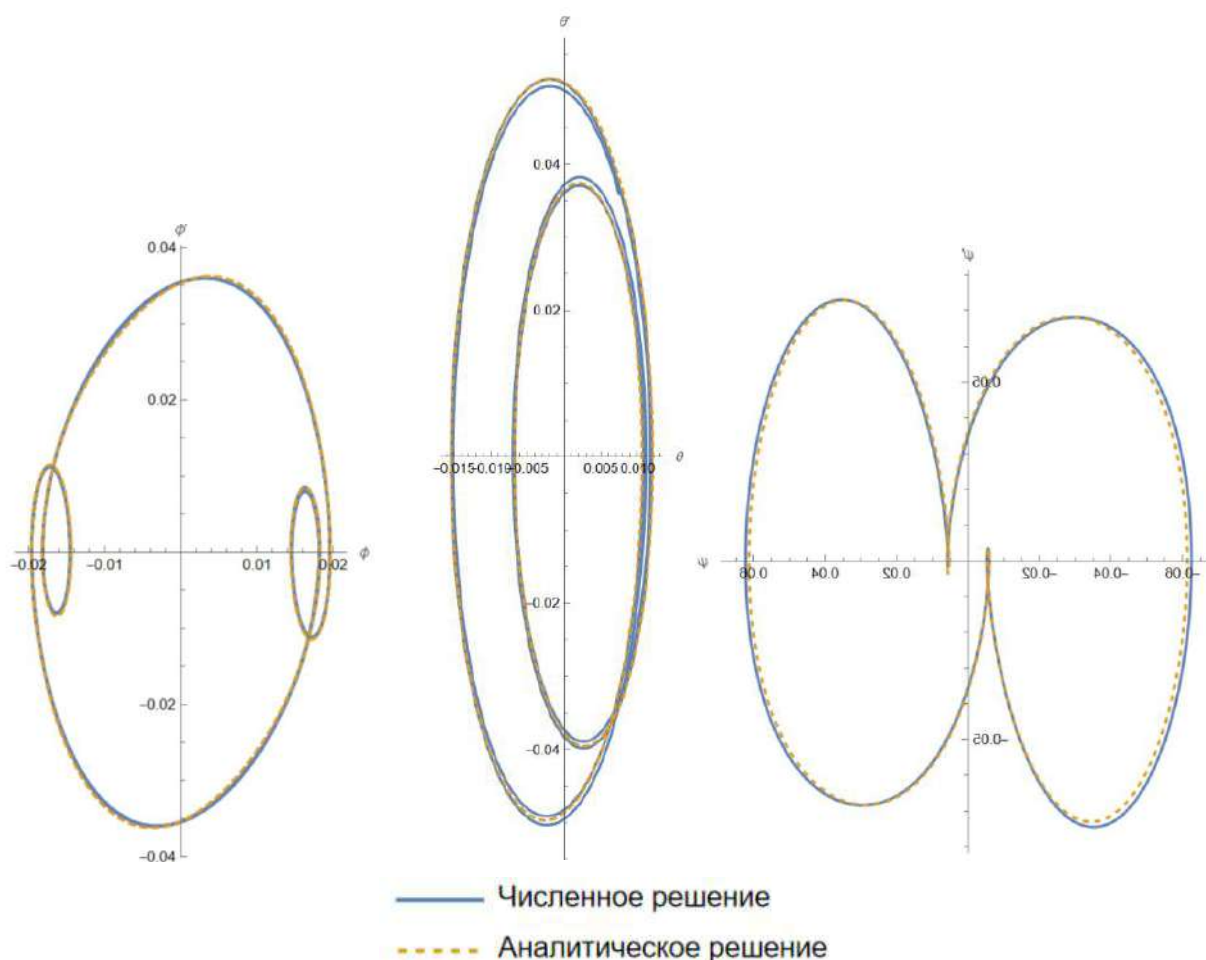


Рис. 1. Фазовые траектории решений системы

Анализ приведенных графиков показывает, что аналитическое и численное решения имеют очень хорошую точность совпадения. Численный подсчет максимальной разности  $\Delta_{max}\Phi$ ,  $\Delta_{max}\Theta$ ,  $\Delta_{max}\Psi$  двух решений дает следующий результат:

$$\Delta_{max}\Phi = 0,00018, \quad \Delta_{max}\Theta = 0,0013, \quad \Delta_{max}\Psi = 0,0014.$$

Это еще раз свидетельствует об эффективности применяемого метода построения приближенного периодического решения.

#### 4. Заключение

Таким образом, в ходе проделанной работы проведено компьютерное моделирование колебаний ИСЗ во введенной магнито-лоренцевой системе координат в гравитационном и магнитном полях Земли на основе полученной системы дифференциальных уравнений, описывающей полупассивный режим управления угловой ориентацией ИСЗ.

Для построения приближенного аналитического решения был использован метод комплексной автономизации. Получено разложение периодического решения в тригонометрические ряды до гармоник пятого порядка включительно. Построенные графики на фазовых плоскостях являются замкнутыми кривыми, что свидетельствует о существовании такого установившегося режима колебаний. По этим же графикам можно судить о том, что полученное решение достаточно точно описывает установившиеся колебания.

Аналитическое выражение дает возможность для оценки величины этих колебаний, что позволит, в зависимости от миссии ИСЗ, судить о необходимости их учета. Если этот учет необходим, то аналитическое выражение позволит внести поправки в показания бортовых приборов и улучшить точность измерений.

## Литература

1. *Сарычев В.А.* Вопросы ориентации искусственных спутников / Итоги науки и техники. Серия ``Исследование космического пространства''. М.: ВИНТИ, 1978. – Т. 11. – 221 с.
2. *Коваленко А.П.* Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1975. – 248 с.
3. *Алпатов А.П., Драновский В.И., Салтыков Ю.Д., Хорошилов В.С.* Динамика космических аппаратов с магнитными системами управления. М.: Машиностроение, 1978. – 200 с.
4. *Тихонов А.А.* Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космич. исслед. – 2003. – Т. 41, № 1. – С. 69–79.
5. *Giri D.K., Sinha M.* Magneto-Coulombic Attitude Control of Earth-Pointing Satellites // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2014. – Vol. 37 (6). – P. 1946–1960. DOI:10.2514/1.G000030.
6. *Antipov K.A., Tikhonov A.A.* Parametric control in the problem of spacecraft stabilization in the geomagnetic field // Autom. Remote Control. – 2007. – Vol. 68 (8). – P. 1333–1345. DOI:10.1134/S000511790708005X.
7. *Tikhonov A.A.* Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: The Concept and Kinematic Analysis // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – Vol. 7(4). – P. 2113-2119. DOI: 10.22055/JACM.2021.37817.3094.
8. *Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A.* Natural Magneto-velocity Coordinate System for Satellite Attitude Stabilization: Dynamics and Stability Analysis // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2023. – Vol. 9(2). – P. 513–520. DOI: 10.22055/jacm.2022.41942.3842.