

# ОБ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОМ СПОСОБЕ БЕЗРЕАКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРБИТАЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА<sup>1</sup>

Клюшин М.А., Петров К.Г., Тихонов А.А.

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия  
m.klyushin@spbu.ru, konstantin.g.petrov@spbu.ru, a.tikhonov@spbu.ru

*Аннотация.* В работе рассматривается орбитальное движение космического аппарата (КА), обладающего переменным электрическим зарядом, в геофизических полях. Исследуется возможность безреактивного управления орбитальным движением КА за счет его взаимодействия с геомагнитным полем. На основе анализа системы дифференциальных уравнений предлагается закон изменения заряда для повышения и понижения орбиты КА. Работоспособность предложенного способа управления подтверждается компьютерным моделированием.

*Ключевые слова:* космический аппарат, управление движением, переменный электрический заряд, геомагнитное поле, безреактивное управление.

## Введение

Стремительное развитие и совершенствование космической промышленности привело к созданию малых космических аппаратов (КА), которые активно применяются как в учебно-образовательных целях, так и в задачах, связанных с обеспечением навигации и мониторинга [1–2]. К преимуществу использования малых КА следует отнести низкую стоимость производства и небольшие сроки их изготовления. Высокий уровень развития нанотехнологий делает возможным интеграцию на борту малых КА различной миниатюрной аппаратуры, измерительных датчиков и гироскопов, что позволяет успешно определять их ориентацию в пространстве и обеспечивать стабилизацию программных режимов углового движения [3–5]. С другой стороны, размеры малых КА накладывают определенные ограничения и затрудняют использование хорошо зарекомендовавших себя систем и органов управления орбитальным движением. Например, применение реактивных двигателей становится проблематичным ввиду небольших запасов топлива на борту КА. Таким образом, возникают актуальные задачи, связанные с разработкой новых способов управления орбитальным движением КА, основанных на взаимодействии с внешними естественными источниками энергии.

В процессе своего движения КА подвергается воздействию различных сил и моментов, оказывающих влияние на его динамику. В настоящей работе исследуется орбитальное движение КА, обладающего переменным электрическим зарядом, в центральном гравитационном и дипольном магнитном полях Земли. Влияние электризации корпуса КА в некоторых случаях рассматривается в качестве нежелательного эффекта [6–8], приводящего к изменению параметров орбиты, но в то же время применяется в рамках способов управления движением, что отражается в многочисленных работах исследователей по всему миру [9–13].

В настоящей работе изучается возможность безреактивного управления орбитальным движением КА, основанного на взаимодействии с магнитным полем Земли (МПЗ), а именно на использовании силы Лоренца, действующей со стороны последнего на движущийся в нем заряженный КА. На основе аналитического исследования системы дифференциальных уравнений движения предлагаются простые законы изменения электрического заряда для увеличения и уменьшения высоты его орбиты. Проводится численное моделирование, демонстрирующее работоспособность предложенного способа управления орбитальным движением КА за счет изменения его электрического заряда, без использования реактивных двигателей.

## 1. Дифференциальные уравнения движения

Рассмотрим представленную на рис. 1 инерциальную правую декартову систему координат  $Oxyz$ , начало которой расположено в центре Земли. Ось  $Oz$  направлена перпендикулярно плоскости первоначальной орбиты, а ось  $Ox$  – в ее восходящий узел, при этом орбита имеет произвольное наклонение  $i$ . Будем исследовать орбитальное движение КА, обладающего переменным электрическим зарядом  $q = q(t)$ , в гравитационном и магнитном полях Земли. Со стороны гравитационного поля на КА действует гравитационная сила  $F_g = -(\mu m/r^3)r$ , где  $m$  – масса КА,  $\mu = 398600.442 \text{ км}^3/\text{с}^2$  –

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031, <https://rscf.ru/project/24-41-02031/>

гравитационный параметр Земли,  $r = (x, y, z)^T$  – радиус-вектор центра масс КА. Со стороны МПЗ на заряженный КА действует сила Лоренца  $F_L = q(v_r \times B)$ , где  $v_r = \dot{r} - \omega_e \times r$  – скорость КА относительно МПЗ, вращающегося вместе с Землей с угловой скоростью  $\omega_e$ ,  $B$  – вектор индукции МПЗ, которое моделируется как «прямой магнитный диполь» [14]. Для принятой модели МПЗ справедлива формула  $B = (B_0/r^5)(3(N \cdot r)r - r^2N)$ , где  $B_0 = 7.604 \cdot 10^{15} \text{ м}^3 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$  – дипольный момент,  $N$  – единичный вектор, направленный от южного полюса диполя к северному. Система дифференциальных уравнений движения, записанная в проекциях на оси системы координат  $Oxyz$ , имеет следующий вид:

$$\ddot{x} = -\mu x/r^3 + a_{Lx}, \quad \ddot{y} = -\mu y/r^3 + a_{Ly}, \quad \ddot{z} = -\mu z/r^3 + a_{Lz}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} a_{Lx} &= -(qB_0)/(mr^5) \cdot ((3z^2 - r^2)\dot{y} \cos i - (3y^2 - r^2)\dot{z} \sin i + 3yz(\dot{y} \sin i - \dot{z} \cos i) - \\ &\quad - \omega_e x(3(y \sin i + z \cos i)^2 - r^2)), \\ a_{Ly} &= -(qB_0)/(mr^5) \cdot (3(y \sin i + z \cos i)(x\dot{z} - z\dot{x}) + r^2\dot{x} \cos i + 3\omega_e y(z^2 + x^2 \sin^2 i) + \\ &\quad + \omega_e(r^2(y \cos i + 2z \sin i) \cos i - 6yz(y \sin i + z \cos i) \cos i)), \\ a_{Lz} &= -(qB_0)/(mr^5) \cdot (3(y \sin i + z \cos i)(y\dot{x} - x\dot{y}) - r^2\dot{x} \sin i + 3\omega_e z(x^2 \cos^2 i - y^2) + \\ &\quad + \omega_e(r^2(2y \cos i + z \sin i) \sin i + 6yz(y \cos i - z \sin i) \cos i)). \end{aligned}$$

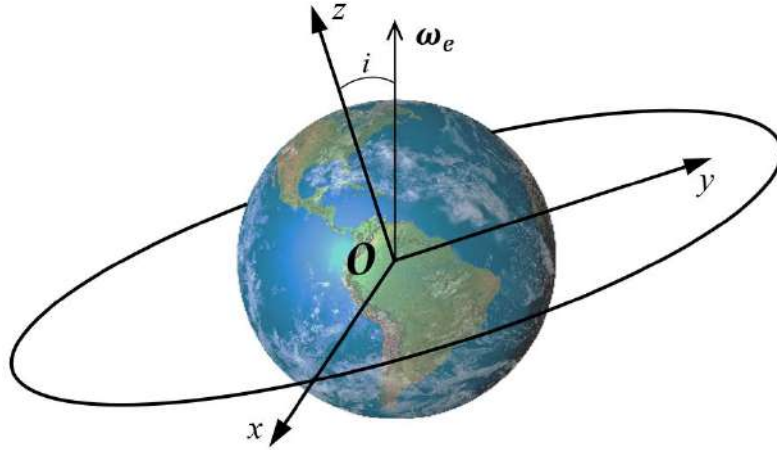


Рис. 1. Декартова система координат

Дополнительно введем сферическую систему координат  $(r, \varphi, \theta)$ , связанную с декартовыми координатами равенствами  $x = r \cos \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \cos \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \sin \theta$ . Рассмотрим движение КА в окрестности невозмущенной круговой орбиты, для которой справедливы равенства  $r = r_0 = \text{const}$ ,  $\dot{\varphi} = \omega_0 = \text{const}$ , где  $r_0$  – радиус кеплеровой орбиты,  $\omega_0$  – соответствующая угловая скорость орбитального движения. Введем малые отклонения  $\Delta r$  и  $\Delta \omega$  такие, что  $r = r_0 + \Delta r$ ,  $\dot{\varphi} = \omega_0 + \Delta \omega$ , и соответствующие этим отклонениям малые безразмерные переменные  $\rho = \Delta r/r_0$ ,  $v = \Delta \omega/\omega_0$ , а также безразмерное время  $\tau = \omega_0 t$ . Кроме этого, введем безразмерный электрический заряд  $\sigma(t) = q(t)/q_0$ , где  $q_0 = \text{const}$  – некоторая характерная величина заряда. Перепишем систему (1) в проекциях на орты сферической системы координат. Учитывая введенные малые переменные, а также считая угол отклонения от плоскости первоначальной орбиты  $\theta$  малым, выполним линеаризацию и обезразмеривание, в результате которых получим следующую дифференциальную систему:

$$\begin{cases} \rho'' - 3\rho - 2v = \varepsilon(2\gamma\rho \sin^2 i \cos^2 \tau - \gamma \sin^2 i \cos^2 \tau - (1 - 2\gamma \cos i)\theta \sin i \sin \tau + \\ \quad + (1 - \gamma \cos i) \cos i - 2(1 - \gamma \cos i)\rho \cos i + v \cos i - \theta' \sin i \cos \tau)\sigma(\tau), \\ v' + 2\rho' = \varepsilon(2\gamma\rho \sin^2 i \sin(2\tau) - \gamma \sin^2 i \sin(2\tau) - \rho' \cos i - 2\theta' \sin i \sin \tau - \\ \quad - 2\gamma\theta \sin i \cos i \cos \tau)\sigma(\tau), \\ \theta'' + \theta = \varepsilon(2\gamma\theta \sin^2 i \sin^2 \tau + \rho' \sin i \cos \tau + 2(1 - \gamma \cos i) \sin i \sin \tau + \\ \quad + 2v \sin i \sin \tau - 4(1 - \gamma \cos i)\rho \sin i \sin \tau + 2(1 - \gamma \cos i)\theta \cos i)\sigma(\tau). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\gamma = \omega_e/\omega_0$ ,  $\varepsilon = q_0 B_0/(m r_0^3 \omega_0)$ , ' – производная по безразмерному времени  $\tau$ . Отметим, что введенный параметр  $\varepsilon$  является малым и для низких околоземных орбит и КА с характерной величиной заряда  $10^{-3}$  Кл и массой 100 кг имеет порядок  $10^{-7}$ .

## 2. О выборе закона изменения заряда

Упрощенная система (2) является линейной, с переменными коэффициентами. Будем считать, что в начальный момент времени орбита КА была невозмущенной, то есть справедливы следующие условия:  $\rho(0) = \rho'(0) = v(0) = \theta(0) = \theta'(0) = 0$ . Применяя метод малого параметра, представим решение системы в виде следующего ряда:

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1, v = v_0 + \varepsilon v_1, \theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1.$$

Подставляя этот ряд в систему (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ , получим порождающую систему, не учитывающую влияние МПЗ и, по этой причине, имеющую тождественно равное нулю решение ( $\rho_0 = v_0 = \theta_0 = 0$ ), и систему, учитывающую влияние силы Лоренца, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \rho_1'' - 3\rho_1 - 2v_1 = -\gamma\sigma(\tau) \sin^2 i \cos^2 \tau + (1 - \gamma \cos i)\sigma(\tau) \cos i, \\ v_1' + 2\rho_1' = -\gamma\sigma(\tau) \sin^2 i \sin(2\tau), \\ \theta_1'' + \theta_1 = 2(1 - \gamma \cos i)\sigma(\tau) \sin i \sin \tau. \end{cases} \quad (3)$$

Отметим, что третье уравнение системы (3) отделяется от первых двух. Первое и второе уравнение связаны так, что результат интегрирования второго уравнения подставляется в первое уравнение, которое в результате этого представляет собой линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Поскольку нашей целью является управление для повышения и понижения высоты орбиты КА, то выбирать закон изменения заряда будем из следующих соображений. Чтобы расстояние увеличивалось или уменьшалось с ростом времени, необходимо иметь в правой части первого уравнения вековой член. Для этого, исходя из отмеченной специфики системы, необходимо, чтобы в правой части второго уравнения было постоянное слагаемое, которое после интегрирования превратится в желаемый вековой член. Принимая во внимание структуру второго уравнения системы (3) и простейшие тригонометрические преобразования, становится понятно, что для этого нужно менять заряд по закону  $\sigma(\tau) = \sin(2\tau)$ , то есть

$$q(t) = q_0 \sin(2\omega_0 t). \quad (4)$$

Решая систему (3) с учетом закона изменения заряда (4) и возвращаясь к размерным переменным, получим следующий закон понижения орбиты КА:

$$\Delta r = -(r_0 \varepsilon \omega_e \sin^2 i) t + (r_0 \varepsilon / 6)(\gamma \sin^2 i - 2(1 - \gamma \cos i) \cos i) \sin(2\omega_0 t) + (2r_0 \varepsilon / 3)(\gamma \sin^2 i + (1 - \gamma \cos i) \cos i) \sin(\omega_0 t). \quad (5)$$

Изменение электрического заряда по аналогичному закону, но с противоположным знаком, то есть

$$q(t) = -q_0 \sin(2\omega_0 t), \quad (6)$$

приводит к повышению орбиты КА, описываемому следующей формулой

$$\Delta r = (r_0 \varepsilon \omega_e \sin^2 i) - (r_0 \varepsilon / 6)(\gamma \sin^2 i - 2(1 - \gamma \cos i) \cos i) \sin(2\omega_0 t) - (2r_0 \varepsilon / 3)(\gamma \sin^2 i + (1 - \gamma \cos i) \cos i) \sin(\omega_0 t). \quad (7)$$

## 3. Численное моделирование

Проведем численное интегрирование нелинейной системы (1) для предложенных законов изменения электрического заряда КА (4) и (6). Интегрирование выполняется методом Рунге-Кутты 4-го порядка [15] с шагом интегрирования, эквивалентным 0.1 секунде. Значения параметров, используемых для моделирования, представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения параметров

Параметр	$r_0$ , км	$\omega_0$ , рад/с	$i$ , °	$m$ , кг	$q_0$ , Кл
Значение	6750	0.11384	51	30	0.001

Анализ графиков на рис. 2 показывает, что предложенный закон изменения электрического заряда (6) позволяет повышать орбиту КА, а закон (4) – понижать. Изменение высоты орбиты составляет около 20 метров в сутки. Таким образом, демонстрируется работоспособность предложенного способа безреактивного управления орбитальным движением КА, основанного на взаимодействии с МПЗ.

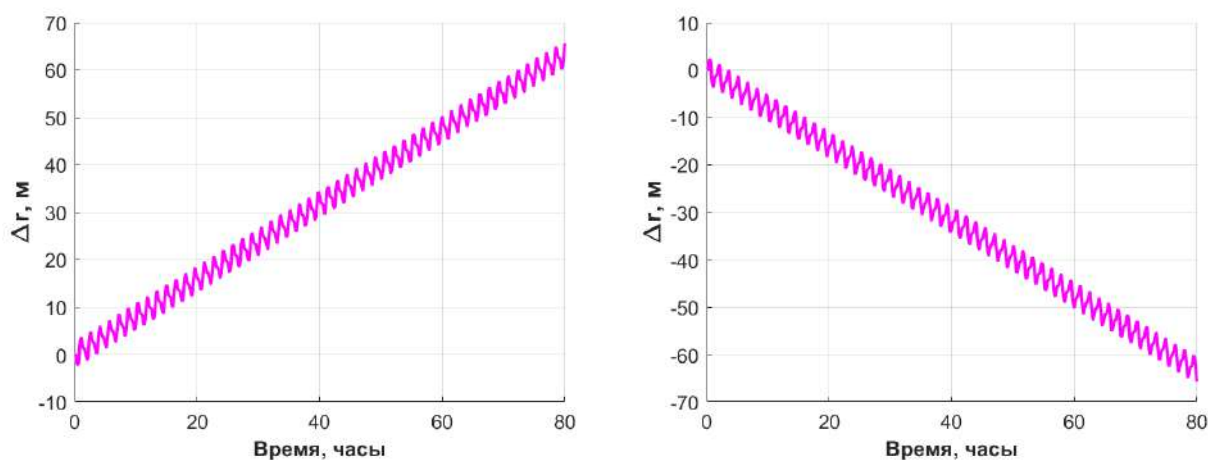


Рис. 2. Увеличение и уменьшение высоты орбиты КА

Стоит также отметить, что полученные в ходе решения линеаризованной системы аналитические выражения (5) и (7) довольно точно описывают характер изменения высоты орбиты КА на достаточно большом временном интервале моделирования. На рис. 3 представлен график относительной ошибки, вычисляемой по формуле  $\Delta r_{\text{ош}} = |(\Delta r_{\text{числ}} - \Delta r_{\text{прибл}}) / \Delta r_{\text{числ}}| \cdot 100\%$ , где  $\Delta r_{\text{прибл}}$  – приближенное аналитическое решение (5) или (7), а  $\Delta r_{\text{числ}}$  – соответствующее численное решение. В течение 200 часов относительная ошибка увеличивается лишь до 0.03%.

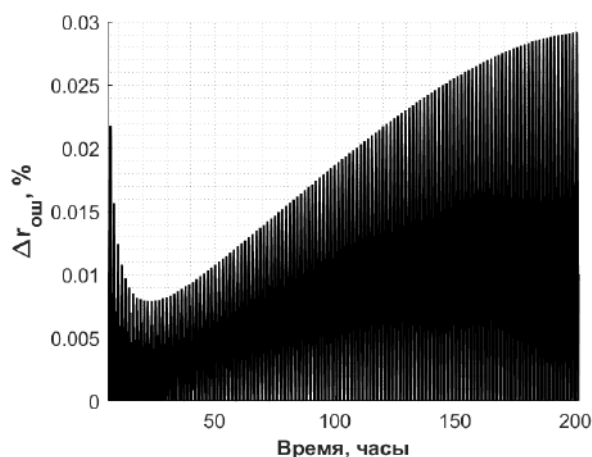


Рис. 3. Относительная ошибка

#### 4. Заключение

В ходе проделанной работы изучены особенности орбитального движения, электрически заряженного КА в гравитационном и магнитном полях Земли. На основе анализа системы дифференциальных уравнений движения предложен закон изменения электрического заряда КА для повышения и понижения его орбиты. Получены простые аналитические выражения, описывающие характер изменения высоты орбиты, которые хорошо согласуются с результатами численного интегрирования нелинейной системы на довольно большом временном интервале моделирования. Таким образом, предложенный электродинамический способ безреактивного управления орбитальным движением, основанный на использовании силы Лоренца, действующей на КА со стороны геомагнитного поля, может использоваться в задачах корректировки траектории КА, движущегося в околоземном пространстве под влиянием внешних возмущений.

## Литература

1. Кулаков В.А. Применение нанотехнологий и наноматериалов в ракетно-космической технике / В.А. Кулаков. – М.: ООО «Директ-Медиа», 2022. – 106 с.
2. Белоконов И.В., Болтов Е.А., Елисов Н.А., Ломака И.А., Николаев П.Н., Шафран С.В. Наноспутниковая платформа SAMSAT для проведения исследований ионосферы Земли // К.Э. Циолковский. История и современность: материалы 57-х Научных чтений. – Калуга, 2022. – С. 25–28.
3. Тихонов А.А. Метод полупассивной стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. 2003. Т. 41. № 1. – С. 69–80.
4. Белоконов И.В., Иванов Д.С., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Пассивная система демпфирования углового движения наноспутника Samsat-QB50 // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. – 2019. – № 5. – С. 117–129.
5. Ivanov D., Roldugin D. Nanosatellite three-axis attitude control and determination using two magnetorquers only // Proc. of 9-th International Conference on Recent Advances in Space Technologies, RAST 2019. – Istanbul, 2019. – P. 761–768.
6. Любомудров А.А., Ефанов В.В., Горовцов В.В., Кузин Е.Н. Электромагнитные помехи, генерируемые в космическом аппарате при электризации // Вестник НПО им. С.А. Лавочкина, 2/40, 2018. – С. 87–92.
7. Ключин М.А., Максименко М.В., Сахаров В.Ю., Тихонов А.А. Нелинейная динамика и численное моделирование задачи управления орбитальным движением заряженного космического аппарата // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2024): труды Семнадцатой международной конференции – М.: ИПУ РАН, 2024. – С. 518–523.
8. Ключин М.А., Тихонов А.А. Стабилизация электрически заряженного космического аппарата в плоскости орбиты // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2025. – Т. 12, № 1. – С. 160–176.
9. Антипов К.А., Тихонов А.А. Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле // Космические исследования. – 2014. – Т. 52, № 6. – С. 512–520.
10. Huang X., Yan Y., Zhou Y., Zhang H. Sliding mode control for Lorentz-augmented spacecraft hovering around elliptic orbits // Acta Astronautica. – 2014. – Vol. 103. – P. 257–268.
11. Giri D., Sinha M., Kumar K. Fault-tolerant attitude control of magneto-coulombic satellites // Acta Astronautica. – 2015. – Vol. 116. – P. 254–270.
12. Чернов К.С., Иванов Д.С. Исследование движения группы из четырех связанных космических аппаратов под управлением с использованием сил Лоренца // Космические исследования. – 2023. – Т. 61, № 4. – С. 339–352.
13. Klyushin M.A., Tikhonov A.A., Giri D.K. Orbital motion control of an electrically charged spacecraft // Acta Astronautica. – 2025. – Vol. 226. – P. 626–636.
14. Белецкий В.В. Вращательное движение намагниченного спутника / В.В. Белецкий, А.А. Хентов. – М.: Наука, 1985.
15. Иванов Д.С., Трофимов С.П., Широбоков М.Г. Численное моделирование орбитального и углового движения космических аппаратов под общ. ред. М.Ю. Овчинникова. М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша, 2016.