СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АППРОКСИМАЦИЙ В ТЕОРИИ ТРАЕКТОРИЙ-УТОК

Кирсанова А.С.
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Самара, Россия
askirsanova99@gmail.com

Аннотация. В статье проводится сравнительный анализ аппроксимации Маклорена и аппроксимации Паде, при построении асимптотических приближений уточных значений управляющего параметра для системы уравнений Ван дер Поля. Результаты анализа демонстрируют заметное преимущество дробно-рациональных приближений Паде над обычно используемыми приближениями на основе рядов Маклорена.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, инвариантные многообразия, траектории-утки, асимптотические разложения, аппроксимации Паде, аппроксимации Маклорена.

Введение

Одной из ключевых задач в теории траекторий уток является наиболее точное определение параметров, характеризующих поведение решений. В частности, при использовании теории траекторий уток для анализа конкретных прикладных задач возникает проблема вычисления так называемых параметров уток с высокой точностью. Например, для классического уравнения Ван дер Поля при малом параметре $\varepsilon = 0{,}01$ требуется определять эти параметры с точностью до 10 знака после запятой.

Традиционный подход для решения этой задачи основан на применении асимптотических разложений, таких как ряд Маклорена [1, 2]. Однако с увеличением количества членов ряда аналитические вычисления становятся чрезвычайно громоздкими, что ограничивает их практическую применимость. В связи с этим особый интерес представляют методы, позволяющие повысить точность аппроксимаций без существенного усложнения вычислений. Одним из таких методов является аппроксимация Паде, которая за счет рациональных приближений часто обеспечивает лучшую сходимость по сравнению с классическим степенными рядами [3].

1. Определение. Постановка задачи

1.1. Определение

Пусть некоторую функцию f из ε можно представить в виде:

$$f(\varepsilon) = f_{M_n}(\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{1}$$

где

$$f_{M_n}(\varepsilon) = f_0 + f_1\varepsilon + f_2\varepsilon^2 + f_3\varepsilon^3 + f_4\varepsilon^4 + \cdots + f_n\varepsilon^n, \tag{2}$$

и

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3\varepsilon^3 + \cdots + a_k\varepsilon^k, \\ B(\varepsilon) &= 1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + b_3\varepsilon^3 + \cdots + b_m\varepsilon^m. \end{aligned} \tag{3}$$

Определение. Аппроксимацией Паде называется рациональная функция вида [3]:

$$[k/m] = \frac{A(\varepsilon)}{B(\varepsilon)} = (a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots + a_k\varepsilon^k)/(1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \cdots + b_m\varepsilon^m), \tag{4}$$

где $k+m=n$, если выполнено соотношение:

$$f(\varepsilon) - [k/m] = f(\varepsilon) - \frac{a_0 + a_1\varepsilon + a_1\varepsilon^2 + \cdots + a_k\varepsilon^k}{1 + b_1\varepsilon + b_1\varepsilon^2 + \cdots + b_m\varepsilon^m} = O(\varepsilon^{n+1}). \tag{5}$$

1.2. Постановка задачи. Релаксационный цикл и траектории-утки

Рассмотрим известную систему Ван дер Поля, которая представляет собой следующую систему дифференциальных уравнений [4, 5]:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \alpha - x, \\ \varepsilon\dot{x} &= y - F(x) \end{aligned} \tag{6}$$

где $F(y) = \frac{x^3}{3} - x$. Таким образом, система будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{gathered} \dot{y} = \alpha - x, \\ \varepsilon \dot{x} = y - \frac{x^3}{3} + x. \end{gathered} \tag{7}$$

Медленная кривая системы (7) задается уравнением:

$$y = \frac{x^3}{3} - x. \tag{8}$$

Для определения устойчивых и неустойчивых участков медленной кривой, представленной уравнением (8), необходимо найти производную y.

В результате, к устойчивым участкам медленной кривой относятся

$$x \in (-\infty, -1); (1, \infty),$$

неустойчивым участком является:

$$x \in (-1, 1).$$

Устойчивые и неустойчивый участки медленной кривой разделены точками срыва $A(-1,\ \frac{2}{3})$ и $B(1, -\frac{2}{3})$. График медленной кривой (8) с точками срыва представлен на рисунке 1.

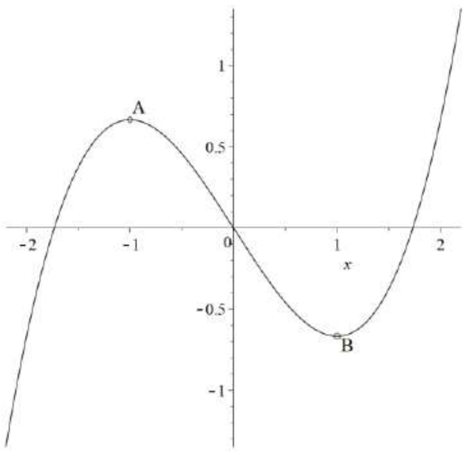

Рис. 1. Медленная кривая (8) и точки срыва A и B

При $\varepsilon = 0.01$ уточное значение параметра следующее: $\alpha^* = 0.998740451(2/3)$.

Здесь (2/3) означает, что значение α с 2 на конце соответствует утке с головой, а значение с 3 соответствует утке без головы. Это означает, что любое число из промежутка, концами которого являются два этих числа, является уточным значением для уравнения Ван дер Поля, в полном соответствии с известной теоремой "Жизнь уток коротка" [2]. При очень малом изменение параметра, в данном случае в 10 знаке, амплитуда колебания возрастает практически от 0 до очень большой. Другими словами, это явление называется уточным взрывом.

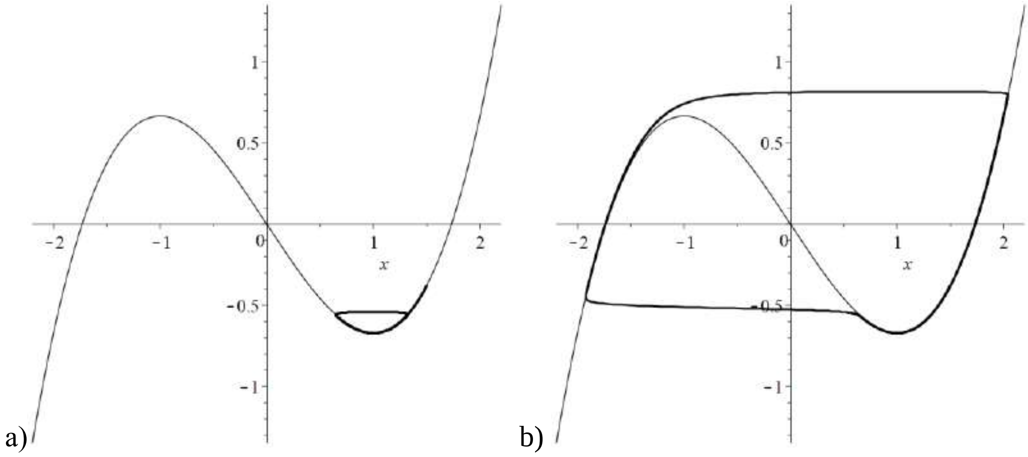

*Рис. 2. Медленная кривая (тонкая линия) и траектория системы (жирная линия) при ε = 0.01; a) α = 0.998740451**3**; b) α = 0.998740451**2**; начальная точка: x(0) = 1.5, y(0) =-3/8*

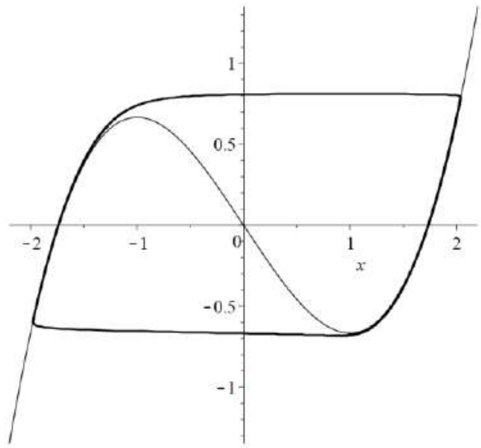

Рис. 3. Медленная кривая (тонкая линия) и траектория системы (жирная линия) при ε = 0.01; α =0.9; начальная точка: x(0) = 1.5, y(0) =-3/8

2. Сравнение аппроксимации Маклорена и аппроксимации Паде

2.1. Уточное значение как асимптотическое разложение. Аппроксимация Маклорена

Уточное значение можно найти как асимптотическое разложение в виде [1, 5]

$$\begin{gathered} y = \varphi(x,\varepsilon) = \varphi_0(x) + \varepsilon\varphi_1(x) + \varepsilon^2\varphi_2(x) + \cdots, \\ \alpha = \alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \cdots \end{gathered} \tag{9}$$

$$\varepsilon\dot{x} = \varphi(x,\varepsilon) - \frac{x^3}{3} + x$$

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi(x,\varepsilon)\big) = \frac{d\varphi}{dx}\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\varphi(x,\varepsilon)\big) = \frac{d\varphi}{dx}\frac{\varphi(x,\varepsilon) - \frac{x^3}{3} + x}{\varepsilon}$$

$$\varphi'\left[\frac{\varphi(x,\varepsilon) - \frac{x^3}{3} + x}{\varepsilon}\right] = \alpha - x$$

$$\varphi_0(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

Уравнение инвариантности, с учетом $\varphi'_0(x)$, будет следующим:

$$\left[x^2-1+\varepsilon\varphi'_1(x)+\varepsilon^2\varphi'_2(x)+\varepsilon^3\varphi'_3(x)+\varepsilon^4\varphi'_4(x)+\cdots\right][\varphi_1(x)+\varepsilon\varphi_2(x)+\varepsilon^2\varphi_3(x)+\varepsilon^3\varphi_4(x)+\varepsilon^4\varphi_5(x)+\cdots]=\alpha_0+\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^2\alpha_2+\varepsilon^3\alpha_3+\varepsilon^4\alpha_4+\cdots-x \tag{10}$$

Выпишем коэффициенты при соответствующих степенях ε.

При $\varepsilon=0$:

$$\varphi_1(x)(x^2-1)=\alpha_0-x$$
$$\varphi_1(x)=\frac{\alpha_0-x}{x^2-1}$$

Отсюда:

$$\alpha_0=1,\ \varphi_1(x)=\frac{1-x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{1}{x+1} \tag{11}$$

Найдем производную уравнения (11) и значения $\varphi_1(x)$ и $\varphi'_1(x)$в точке $x=\alpha_0$:

$$\varphi'_1(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$
$$\varphi_1(1)=-\frac{1}{2},\qquad \varphi'_1(1)=\frac{1}{4}$$

При ε^1:

$$\varphi'_1(x)\varphi_1(x)+\varphi_2(x)(x^2-1)=\alpha_1$$
$$\varphi_2(x)=\frac{\alpha_1-\varphi'_1(x)\varphi_1(x)}{x^2-1}$$

Отсюда:

$$\alpha_1=\varphi'_1(x)\varphi_1(x)|_{x=\alpha_0}=-\frac{1}{8}$$

Тогда

$$\varphi_2(x)=\frac{-\frac{1}{8}+\frac{1}{(x+1)^2}\left(-\frac{1}{x+1}\right)}{x^2-1}=\frac{8-(x+1)^3}{8(x+1)^3(x^2-1)}=\frac{-(x-1)(4+2(x+1)+(x+1)^2)}{8(x+1)^3(x-1)(x+1)}=\frac{-x^2+4x+7}{8(x+1)^4} \tag{12}$$

Найдем производную уравнения (12) и значения $\varphi_2(x)$ и $\varphi'_2(x)$в точке $x=\alpha_0$:

$$\varphi'_2(x)=\frac{x^2+5x+12}{4(x+1)^5}$$
$$\varphi_2(1)=-\frac{3}{32},\qquad \varphi'_2(1)=\frac{9}{64}$$

При ε^2:

$$\varphi_3(x)(x^2-1)+\varphi'_1(x)\varphi_2(x)+\varphi'_2(x)\varphi_1(x)=\alpha_2$$
$$\varphi_3(x)=\frac{\alpha_2-\varphi'_1(x)\varphi_2(x)-\varphi'_2(x)\varphi_1(x)}{x^2-1}$$

Отсюда:

$$\alpha_2=\varphi'_1(x)\varphi_2(x)+\varphi'_2(x)\varphi_1(x)|_{x=\alpha_0}=-\frac{3}{32}$$

Тогда

$$\varphi_3(x)=-\frac{3x^5+21x^4+66x^3+126x^2+159x+121}{32(x+1)^7} \tag{13}$$

Найдем производную уравнения (13) и значения $\varphi_3(x)$ и $\varphi'_3(x)$в точке $x=\alpha_0$:

$$\varphi'_3(x)=\frac{3x^5+24x^4+90x^3+216x^2+351x+344}{16(x+1)^8}$$
$$\varphi_3(1)=-\frac{31}{256},\qquad \varphi'_3(1)=\frac{257}{1024}$$

При ε^3:

$$\varphi_4(x)(x^2-1)+\varphi_1'(x)\varphi_3(x)+\varphi_2'(x)\varphi_2(x)+\varphi_3'(x)\varphi_1(x)=\alpha_3$$

$$\varphi_4(x)=\frac{\alpha_3-\varphi_1'(x)\varphi_3(x)-\varphi_2'(x)\varphi_2(x)-\varphi_3'(x)\varphi_1(x)}{x^2-1}$$

Отсюда:

$$\alpha_3=\varphi_1'(x)\varphi_3(x)+\varphi_2'(x)\varphi_2(x)+\varphi_3'(x)\varphi_1(x)|_{x=\alpha_0}=-\frac{173}{1024}$$

Тогда

$$\varphi_4(x)=-\frac{173x^8+1730x^7+7958x^6+22490x^5+44000x^4+63558x^3+69930x^2+57054x+28403}{1024(x+1)^{10}} \quad (14)$$

Найдем производную уравнения (14) и значения $\varphi_4(x)$ и $\varphi'_4(x)$в точке $x=\alpha_0$:

$$\varphi_4'(x)=\frac{\begin{gathered}173x^8+1903x^7+9861x^6+32351x^5+75775x^4+1134453x^3+184383x^2+\\+186813x+113488\end{gathered}}{512(x+1)^{11}}$$

$$\varphi_4(1)=-\frac{2307}{8192},\qquad \varphi_4'(1)=\frac{5775}{8192}$$

При ε^4:

$$\varphi_5(x)(x^2-1)+\varphi_1'(x)\varphi_4(x)+\varphi_2'(x)\varphi_3(x)+\varphi_3'(x)\varphi_2(x)+\varphi_4'(x)\varphi_1(x)=\alpha_4$$

$$\varphi_5(x)=\frac{\alpha_4-\varphi_1'(x)\varphi_4(x)-\varphi_2'(x)\varphi_3(x)-\varphi_3'(x)\varphi_2(x)-\varphi_4'(x)\varphi_1(x)}{x^2-1}$$

Отсюда:

$$\alpha_4=\varphi_1'(x)\varphi_4(x)+\varphi_2'(x)\varphi_3(x)+\varphi_3'(x)\varphi_2(x)+\varphi_4'(x)\varphi_1(x)|_{x=\alpha_0}=-\frac{7593}{16384}$$

Получаем следующее разложение в ряд Маклорена (уточное значение параметра α):

$$\alpha=\alpha(\varepsilon)=1-\frac{1}{8}\varepsilon-\frac{3}{32}\varepsilon^2-\frac{173}{1024}\varepsilon^3-\frac{7593}{16384}\varepsilon^4+\cdots \quad (15)$$

2.2. Аппроксимация Паде. Сравнение аппроксимаций

Введем обозначение для отрезка ряда Маклорена:

$$M_n(\varepsilon)=f_0+f_1\varepsilon+\cdots+f_n\varepsilon^n$$

Рассмотрим случай при ε = 0.01, получаем следующие значения отрезков аппроксимации Маклорена:

$$M_2(0.01)=0.998740\mathbf{6}25;$$

$$M_3(0.01)=0.99874045\mathbf{6}0546875;$$

$$M_4(0.01)=0.998740451\mathbf{4}20288.$$

Исходя из соотношения (5) и найденных коэффициентов разложения Маклорена (15), мы можем найти Паде аппроксимации (4). Для этого необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ε в уравнении (16)

$$\left(a_0+a_1\varepsilon+a_1\varepsilon^2+\cdots+a_k\varepsilon^k\right)=$$
$$(1+b_1\varepsilon+b_1\varepsilon^2+\cdots+b_m\varepsilon^m)(f_0+f_1\varepsilon+f_2\varepsilon^2+f_3\varepsilon^3+f_4\varepsilon^4+\cdots+f_n\varepsilon^n) \quad (16)$$

В результате получим формулы для $a_0, a_1, \ \ldots, a_k$ и уравнения для определения $b_1, \ \ldots, b_k$.

Ограничимся случаем $n\le 4$. В этом случае можно получить аппроксимации Паде вида [1/1], [1/2], [2/1], [2/2]. Для аппроксимации Паде вида [1/1] уравнение (16) следующее:

$$(a_0+a_1\varepsilon)=(1+b_1\varepsilon)(f_0+f_1\varepsilon+f_2\varepsilon^2) \quad (17)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем формулы для a_0, a_1, b_1:

$$a_0 = f_0,\ a_1 = f_1 - \frac{f_0 f_2}{f_1},\ b_1 = -\frac{f_2}{f_1}.$$

Тогда Паде аппроксимация вида [1/1]:

$$[1/1] = \frac{a_0 + a_1\varepsilon}{1 + b_1\varepsilon}$$

Подставив все найденные значения и $\varepsilon = 0.01$:

$$[1/1](\varepsilon) = \frac{1 - \frac{7}{8}\varepsilon}{1 - \frac{3}{8}\varepsilon}, \qquad [1/1](0.01) = 0.998740\mathbf{5}54156\ldots$$

Аналогично, найдем Паде аппроксимации вида [1/2], [2/1], [2/2].

Аппроксимация Паде вида [1/2]:

$$[1/2] = \frac{a_0 + a_1\varepsilon}{1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2},$$

где коэффициенты ищутся по формулам:

$$a_0 = f_0,\ \ b_1 = \frac{f_0f_3 - f_1f_2}{f_1^2 - f_0f_2},\ \ b_2 = \frac{f_2^2 - f_1f_3}{f_1^2 - f_0f_2},\ \ a_1 = f_1 + f_0b_1.$$

Подставив все найденные значения и $\varepsilon = 0.01$:

$$[1/2](\varepsilon) = \frac{-\frac{199}{112}\varepsilon + 1}{-\frac{101}{896}\varepsilon^2 - \frac{185}{112}\varepsilon + 1}, \qquad [1/2](0.01) = 0.99874045\mathbf{3}107\ldots$$

Аппроксимация Паде вида [2/1]:

$$[2/1] = \frac{a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2}{1 + b_1\varepsilon},$$

где коэффициенты ищутся по формулам:

$$a_0 = f_0,\ \ b_1 = -\frac{f_3}{f_2},\ \ a_1 = f_1 - \frac{f_0f_3}{f_2},\ \ a_2 = f_2 - \frac{f_1f_3}{f_2}.$$

Подставив все найденные значения и $\varepsilon = 0.01$:

$$[2/1](\varepsilon) = \frac{\frac{101}{768}\varepsilon^2 - \frac{185}{96}\varepsilon + 1}{-\frac{173}{96}\varepsilon + 1}, \qquad [2/1](0.01) = 0.99874045\mathbf{2}954\ldots$$

Аппроксимация Паде вида [2/2]:

$$[2/2] = \frac{a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2}{1 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2},$$

где коэффициенты ищутся по формулам:

$$a_0 = f_0,\ \ b_1 = \frac{f_2f_3 - f_1f_4}{f_1f_3 - f_2^2},\ \ b_2 = \frac{f_2f_4 - f_3^2}{f_1f_3 - f_2^2},\ \ a_1 = f_1 + f_0b_1,\ \ a_2 = f_2 + f_1b_1 + f_0b_2.$$

Подставив все найденные значения и $\varepsilon = 0.01$:

$$[2/2](\varepsilon) = \frac{1 - \frac{5719}{1616}\varepsilon + \frac{9967}{6464}\varepsilon^2}{1 - \frac{5517}{1616}\varepsilon + \frac{15629}{12928}\varepsilon^2}, \qquad [2/2](0.01) = 0.998740451\mathbf{2}78\ldots$$

Сравнивая полученные значения для аппроксимаций Маклорена и Паде с численным значением утки $\alpha^* = 0.9987404512$:

$$\alpha^* - M_2 = -1.738000 * 10^{-7}$$
$$\alpha^* - [1/1] = -1.029562 * 10^{-7}$$

$$\alpha^* - M_3 = -4.8547 * 10^{-9}$$
$$\alpha^* - [1/2] = -1.9078 * 10^{-9}$$

$$\alpha^* - M_3 = -4.8547 * 10^{-9}$$
$$\alpha^* - [2/1] = -1.7546 * 10^{-9}$$

$$\alpha^* - M_4 = -2.203 * 10^{-10}$$
$$\alpha^* - [2/2] = -7.79 * 10^{-11}$$

В результате, получаем, что для уравнения Ван дер Поля аппроксимация Паде [2/2] дает уточное значение, которое в определенном смысле можно рассматривать как точное, так как оно принадлежит описанному выше интервалу уточных значений. Заметим, что величина $M_4(0.01)$ не относится к числу уточных значений.

3. Заключение

В работе проведен сравнительный анализ аппроксимации Маклорена и аппроксимации Паде, при построении асимптотических приближений уточных значений управляющего параметра для системы уравнений Ван дер Поля. Полученные результаты демонстрируют существенное преимущество дробно-рациональных аппроксимаций Паде по сравнению с аппроксимациями Маклорена.

Литература

1. *Мищенко Е.Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания // Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
2. *Соболев В.А.* Редукция моделей и критические явления в макрокинетике / В.А. Соболев, Е.А. Щепакина. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2010. – 320 с.
3. *Baker G.A., Graves-Morris P.* Pad´e approximants: encyclopedia of mathematics and its applications // G.A. Baker, P. Graves-Morris. Cambridge [Cambridgeshire], New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1996. – 764 p.
4. *Звонкин А.К., Шубин М.А.* Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. – 1984. – Т. 39, № 2(236). – С. 77–127.
5. *Kirsanova A., Sobolev V.* Padé approximants of canards and critical regimes of Darrieus wind turbine model[J] // Mathematics in Engineering. – 2025. – Vol. 7, № 3. – P. 194–207.