О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РАСШИРЕНИИ ДВУХУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО УТВЕРЖДЕНИЯ ОПЕРАЦИЙ

Машалов Н.Е.
МФТИ, Физтех, Москва, Россия
mashalov.ne@phystech.edu

Аннотация. Рассматривается Байес-Нэшево равновесие в параметрической двухуровневой системе на основе центрального согласования операций. В условиях игр с неполной информацией разобраны случаи заданного уровня доверия и детального баланса. Проанализирован частный случай расширения матричной игры 2х2, найден необходимый уровень доверия для нахождения нового равновесия.

Ключевые слова: игровое расширение, иерархические игры, кооперативные игры, детальное равновесие, Байес-Нэшево равновесие.

Введение

Заверение операций широко распространено в сфере финансовых услуг. Платежные системы выполняют международные стандарты обеспечения безопасности данных платежных карт как PCI DSS (с англ. *стандарт безопасности индустрии платежных карт*). Скорость и безопасность операций важны для сферы туризма, поставок и ведения дела. Для выполнения требований стандарта банковские транзакции сопровождаются этапами авторизации, клиринга и расчета. Аналогично цифровые валюты используют механизмы утверждения на основе блокчейна (с англ. *цепь блоков*). Наиболее популярны системы защиты на основе консенсуса участников, подтверждающие долю владения (от англ. *proof-of-stake*) и выполнение работы (от англ. *proof-of-work*) [1].

Системы финансовых операций принципиально описываются двухуровневыми иерархическими играми. Для моделирования существенен учет доверия агентов к центру, выполняющего операции. В теории игр меру доверия рассматривают как предсказуемость действий игроков, отражающую асимметрию информации между участниками. Проблемы управления в условиях недостатка информации подробно разобраны в работах и монографиях Ю.Б. Гермейр и В.Н. Бурков [2-3]. В постановках иерархических игр проблема управления разрешается на основе введения правил стимулирования и штрафных санкций, обеспечивающих интересы системы.

В докладе рассматривается расширение кооперативных игр до двухуровневых с участием центра-координатора. В первой части работы описывается аналитический аппарат исследования операций и подход к поиску порогового значения доверия, необходимого к перемене равновесия. Во второй, определяется характерное значение числа участников, достаточное для введения центра.

1. Байесовы игры

Запись игры может быть выполнена в нормальной форме, заданной конечным набором игроком мощности N, набором доступных действий для игроков $\boldsymbol{A} = (A_1, \dots, A_n)$ и функцией выплат игрокам по результат принятия действий $u: A^N \to R^N$ [2]. В случае игры двух участников запись записывается в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где u_{ij} задает выигрыш игрока при условии того, что игрок 1 выполнит действие A_i (по строке), а игрок 2 – A_j (по колонке). При этом предполагается, что игроки рациональны и выбирают решения исходя из максимально полезного исхода при произвольных действиях прочих игроков – равновесие по Нэшу. Таким образом, функция оптимизации игрока записывается как[1]:

$$\min_{-\boldsymbol{i}} \max_{i} u_i .$$

В случае смешанных стратегий выигрыш игроков можно записать с использовать с применением линейной алгебры:

[1] *здесь и далее индекс $-i$ обозначает вектор решений участников игры кроме i-ого игрока.*

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{y},$$

где $\boldsymbol{x}$ – вектор вероятности выбора действий игрока 1, а $\boldsymbol{y}$ – игрока 2. В 1928 году Джоном фон Нейманом был получен результат, что в случае смешанных стратегий минимаксные стратегии эквиваленты.

В случае кооперативных игр оптимизационной задачей как правило является поиск и максимизация общей суммы утилитарности по игрокам в заданном Нэшевом равновесии:

$$\max_i \sum_i u_i \,.$$

Анализ взаимного доверия игроков выполняется с применением теории игр с неполной информацией. Уверенность игроков в решениях прочих агентов моделируется с помощью вероятностных распределений π_{-i}. При этом участник выбирает стратегию с целью максимизации матожидания по возможным исходам:

$$\min_{-i} \max_{i} \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\pi}_{-i}} u_i,$$

задающее Байес-Нэшево равновесие. Асимметрия информации проявляется в различии личной смешанной стратегии π_i и предполагаемой прочими игроками π_{-i}.

Как правило задача поиска равновесия в Байесовой игре в общем случае неразрешима, поэтому для анализа постановки используются дополнительные ограничения и предположения. Наиболее популярно предположение об эквивалентности стратегий игроков. В этом случае, равновесие называется симметричным Байес-Нэшевым. Такое предположение часто используется в теории аукционов и контрактов [5]. В случае моделирования значительного числа игроков используется приближение среднего поля, принципиально заключающееся в замене функции утилитарности исходов $u: A^N \to R^N$ на функционал $U: P \to R$, где P – распределение возможных стратегий прочих игроков:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_i^N u_i \approx \int_P u \, dp(u).$$

1.1. Случай заданного уровня доверия

В частном случае заданного уровня доверия игроки учитывают возросшую ценность взаимной стратегии, предлагаемой координатором $\pi_i^*(p)$, где p – вероятность выполнения игроками координированного действия. Обозначим за $T: S^n \to R$, заданного на симплексе возможных стратегий S^n как:

$$T(\pi) = \min_{\pi_{-i}} \max_{\pi_i} E_\pi u_i.$$

Согласно теореме Катукани о неподвижной точке выпуклый оператор T всегда имеет минимакс, поскольку множество оптимизации заданно выпуклым симплексом S^n [4]. Решении о выборе новой стратегии игроки принимают на основе неравенства:

$$T\big(\pi^*(p)\big) > T(\pi),$$

где выражение в левой части отвечает за пользу действия, предложенного координатором, а правая за доминирующее равновесие в оригинальной игре.

Таким образом, задача координационного центра заключается в определение параметра p, соответствующего переходу к новому равновесию. Решим задачу в условиях симметричного Байес-Нэшевого равновесия. В этом случае задача сводится к матричной игре вида:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{n1} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix},$$

где матричные значения на диагонали без потери общности определены в порядке возрастания $u_{11} < \; ... < u_{nn}$. Заметим, что наличие Нэшево равновесие требует, чтобы хотя бы один элемент в строке был меньше диагонального $\forall j \; \exists i: u_{ji} > u_{jj}$ [6].

Цепочка переходов $p_1, \dots, p_n$ отражает возможности улучшения работы координатора для получения оптимального взаимного равновесия. При этом условие на параметр доверия для перехода между равновесиями запишется как:

$$\sum_i^N C_N^i p^i (1-p)^{N-i} u_{ii} \min_j u_{ij} = u_{i-1,i-1}, \tag{1}$$

где C_N^i – биноминальный коэффициент. Обратим внимание, что в силу диагонального преобладания p существует, несмотря на ограниченность на промежутке значений $[0,1]$. Полином в правой части выражения обозначим за оператор F:

$$F(p,u) \coloneqq \sum_i^N C_N^i p^i (1-p)^{N-i} u_{ii} \min_j u_{ij}.$$

Нахождение корня полинома произвольной степени возможно только численно. Проведем эксперимент для случайной матрицы 10×10 с диагональным преобладанием. Значения на диагонали, зададим линейно возрастающие, $u_{ii} = 10i$.

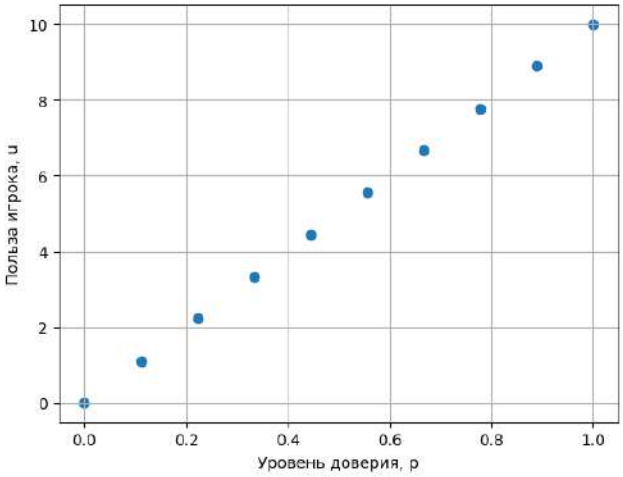

Рис. 1. Рост утилитарности взаимных стратегий в зависимости от уровня доверия. Уровень 0 соответствует Байес-Нэшевому равновесию в отсутствии координатора

Для проведения численных экспериментов использовался алгоритм Лемке-Ховсона поиска игровых равновесий [7].

1.2. Случай детального равновесия

В условиях баланса системы необходимо ввести дополнительную выгоду координатора в зависимости от исхода игры. Разумным будет ввести ее как разность сумм утилитарности в условиях поддерживаемого и доминирующего равновесия:

$$F(p,u) - u_{i-1,i-1}.$$

Затраты на поддержание уровня доверия введем как компенсацию худшего из случаев для каждого из игроков:

$$u_{i-1,i-1} - (1-p) \min_j u_{ij}$$

Тогда найдем параметр p через условие равенства:

$$\sum_{i=1}^N C_N^i p^i (1-p)^{N-i} u_{ii} \min_j u_{ij} - (1-p) \min_j u_{ij} = 0, \tag{2}$$

где первый член отвечает за утилитарность выбора нового равновесия, а второй – за компенсацию в случае неудачи. Обратим внимание, что введённые условия соответствуют детальному равновесию и обеспечивают равновесную стратегию между координатором и игроками.

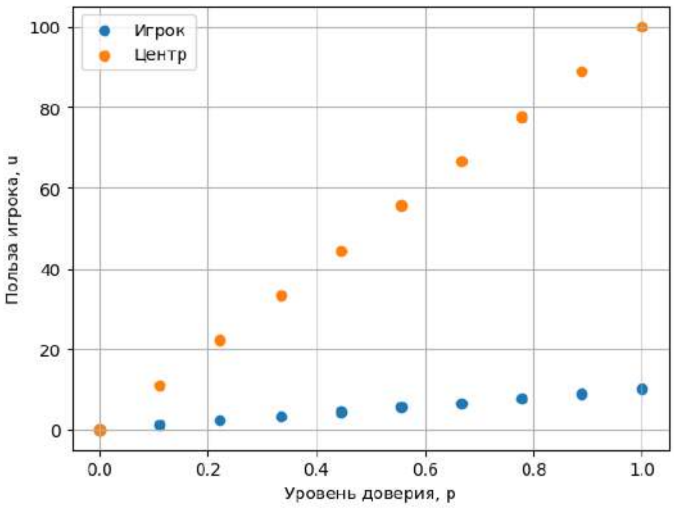

Рис. 2. Рост утилитарности координатора и игроков в зависимости от уровня доверия. Уровень 0 соответствует Байес-Нэшевому равновесию в отсутствии координатора

2. Частный случай расширения. Охота на оленя

Рассмотрим применение подхода на примере игры «Охота на оленя», описанной философом Жан-Жаком Руссо в 1766 году. Игра эквивалента современным координационным играм и дилемме заключенного. В работе [8] предложена запись описанной игры в нормальной форме. Считается, что игроков двое и матрица игры в нормальной форме задается задаётся как:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{1} \\ \mathbf{8} & \mathbf{5} \end{pmatrix},$$

где веса матрицы на позициях 1 и 2 по строкам и столбцам задают охоту на зайца и оленя соответственно. В условиях игры Байес-Нэшево равновесие достигается при выборе игроками охоту на кроликов. Расширим игру введением координатора с уровнем доверия p. Тогда из (1):

$$8 * p(1-p) + 1 * p(1-p) + 10 * p * p + 5 * (1-p)(1-p) > 5$$

Следовательно, $p = \frac{1}{6}$. Детальное равновесие для координатора находим из (2):

$$2 * 10 * p - 2 * \ (5-1) * (1-p) = 28\,p - 8 = 0$$

Порог принятия решения будет равен $\frac{2}{7}$.

3. Заключение

Расширение одноуровневой кооперационной игры введением координатора с заданным уровнем доверия позволяет находить новые более выгодные взаимные равновесия. Решение задается параметром доверия или включением дополнительного игрока «координатора» путем задания условий детального равновесия. Разобранный случай охоты на оленей показывает, что включение координатора повышает утилитарность участников игры.

Литература

1. *Lamport L., Shostak R., M. Pease.* The Byzantine Generals Problem // ACM Trans. Program. Lang. Syst. 1982. – P. 382–401.
2. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.
3. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. – М.: Наука, 1977. – 248 с.
4. *Воробьёв Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
5. *Rubinstein A.* Perfect Equilibrium in a Bargaining Model // Econometrica 50, no. 1, 1982. – P. 97–109.
6. *Basar T., Olsder G.* Dynamic noncooperative game theory // Philadelphia: SIAM, 1999. – P. 519.
7. *Lemke C., Howson J.* Equilibrium points of bimatrix games // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1964. – P. 413–423.
8. *Skyrms B.* The Stag Hunt and Evolution of Social Structure // Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – P. 1–14.