

# ОПТИМАЛЬНЫЕ ИНВЕСТИЦИИ В РАСШИРЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВА ПРИ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКЕ ВЫРУЧКИ<sup>1</sup>

Жукова А.А., Флёрова А.Ю.

Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" РАН, Москва, Россия  
zhukova.aa@phystech.edu, a.flerova@mail.ru

*Аннотация. Данная работа представляет модификацию модели оптимальных инвестиций в расширение производства с учетом логистической динамики дохода. Представлен анализ оптимальной стратегии инвестиций в масштабирование производства. Используя эмпирически найденные параметры логистической динамики выручки идентифицированы параметры оптимального поведения производителя и представлены расчеты переменных модели.*

*Ключевые слова: расширение производства, оптимальное управление, логистическая кривая.*

## Введение

В данной работе рассматривается задача оптимального поведения менеджмента фирмы, которая производит один вид продукции, либо оценивает суммарные показатели выпуска различной продукции в денежном выражении. Базовая версия приведена в [1]. В представляемой здесь модификации мы рассматриваем фирмы, которые рациональным образом принимают решения о масштабировании производства в течение определенного периода времени [2]. Как показывает опыт, специфика российских частных предприятий заключается в том, что они стараются не привлекать внешних инвестиций. В отдельной работе предложена модель, которая может использоваться для анализа и такой постановки с финансированием извне [3].

В данной работе фирма решает, использовать ли ей часть своей выручки для расширения производства. При этом сложность может представлять предел роста фирмы в силу внешних и внутренних факторов, таких как емкость рынка или отрицательная отдача от масштаба [4, 5]. Для описания такой ситуации предлагается использовать логистическую динамику роста производства. Анализ данных в исследованиях [6, 7] показал, что такая динамика может быть свойственна быстрорастущим фирмам и можно идентифицировать параметры роста в соответствии с логистической кривой для отдельных фирм. Эти параметры мы применим для иллюстрации параметров оптимального поведения фирм в нашей работе.

## 1. Модель масштабирования производства в условиях логистического роста выручки

Цель частной фирмы состоит в том, чтобы максимизировать благосостояние владельцев компании. В данной модели благосостояние выражается в потоке выплат дивидендов. Можно ввести дисконтирование в интегральный целевой функционал [4], но это может усложнить анализ модели и будет проделано в будущих исследованиях. Также возможными факторами, которые нужно учитывать в принятии решения о расширении и инвестициях, могут быть инфляция, издержки, высокие процентные ставки, и другие важные для управления факторы [4, 5].

В данной работе мы концентрируемся на базовой модели и влиянии свойств динамики роста на оптимальный выбор момента перехода между режимами инвестирования рост и выплат дивидендов владельцам. Ранее рассматривалась аналогичная задача с экспоненциальным ростом выручки [2].

В модели введены следующие переменные:

- $x(t)$  выручка фирмы за текущий период времени;
- фирма максимизирует свой доход  $\pi(t)$  за период времени  $[0, T]$ ;
- издержки  $TC(t) = cx(t)$  линейно зависят от выручки. Вместо предельных издержек  $c$  удобно использовать коэффициент издержек  $\mu = 1 - c$ ;
- доля выручки, которая инвестируется в расширение производства, обозначена через  $u(t)$ ;
- отдача от инвестиций описывается коэффициентом  $\alpha$ , который в детерминированной версии модели является положительной константой.

Можно сформулировать стохастическую версию модели по аналогии с [8], где отдача от инвестиций не определена наперед, а может принимать несколько значений с соответствующими вероятностями.

---

<sup>1</sup> Данное исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00494, <https://rscf.ru/project/24-21-00494/>

Базовая версия модели масштабирования производства [2] модифицирована введением предположения о специальной динамике выручки, при которой она ограничена сверху некоторым «потолком»  $x(t) \leq s$ . Можно считать, что версия модели с экспоненциальным ростом выручки в [2] имела данное ограничение с уровнем ограничения сверху  $s$  превышающим любой возможный уровень роста выручки. В данной работе мы рассматриваем случай роста компаний до таких размеров, при которых становится значимым ограничение сверху. Такие ситуации возникают, когда при быстро растущая фирма на каком-то этапе не может выйти за возможности потребления рынком, торговых квот, физических ограничений и т.п. [6].

Все выше описанные предположения формализованы в виде следующей задачи оптимального управления

$$\int_0^T (\mu - u(t))x(t)dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha x(t)(s - x(t))u(t), \quad (2)$$

$$0 \leq x(t) \leq s, \quad (3)$$

$$0 \leq u(t) \leq \mu, \quad (4)$$

$$x(0) = x_0. \quad (5)$$

## 2. Оптимальное поведение фирм при планировании расширения производства в условиях логистической динамики роста дохода

Задача оптимального управления (1)–(5) может быть исследована с помощью принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона-Понтрягина задачи имеет вид:

$$H(\lambda_0 t, x, u, p) = \lambda_0 x(t) \mu - x(t) (\lambda_0 - \alpha s p(t) + x(t) p(t) \alpha) u(t) \quad (6)$$

Принцип максимума как необходимое условие дает вид экстремалей, которые имеют следующую структуру. Существует момент времени переключения между режимом инвестирования на максимальном уровне и затем перехода к режиму выплат всего дохода в виде дивидендов собственникам. Можно показать, что выполняются условия теоремы существования решения задачи оптимального управления и параметры оптимального режима имеют следующий вид.

Оптимальное управление:

$$u^*(t) = \begin{cases} \mu, & t < \tau, \\ 0, & t \geq \tau. \end{cases} \quad (7)$$

Момент смены управления:

$$\tau = T - \frac{1}{\alpha \mu (s - X_\tau)}. \quad (8)$$

Траектория роста выручки:

$$x(t) = \begin{cases} s \left( 1 + e^{-\alpha s \mu t} e^{\frac{s(-1 + \alpha s \mu T - X_\tau \alpha \mu T)}{s - X_\tau}} (s - X_\tau) X_\tau^{-1} \right)^{-1}, & t < \tau, \\ X_\tau, & t \geq \tau. \end{cases} \quad (9)$$

Уровень выручки на момент прекращения инвестиций:

$$X_\tau = s \text{LambertW} \left( \frac{x(0) e^{-1 + \alpha s \mu T}}{s - x(0)} \right) \left( 1 + \text{LambertW} \left( \frac{x(0) e^{-1 + \alpha s \mu T}}{s - x(0)} \right) \right)^{-1}. \quad (10)$$

В данном выражении используется специальная функция – функция Ламбера [9]. Далее мы проведем аналогию с исследованием на основе эмпирических данных фирм с идентификацией параметров логистической динамики [6, 7].

### 3. Количественный анализ оптимального поведения фирм, масштабирующих производство на основе идентифицированных параметров

В работах [6, 7] были исследованы данные быстрорастущей компании и смоделирована ее выручка в соответствие с моделью логистической кривой роста. Мы можем применить найденные параметры для ответа на вопрос, каким образом лучше распределять средства, полученные от выручки, на инвестиции в дальнейший рост компании.

В терминах нашей модели, найденные авторами в [7] параметры дают следующие значения модельных показателей. Параметр отдачи от инвестиций  $\alpha = 0.37/4$ . Параметр максимального уровня выручки  $s = 4$ .

Поскольку в нашей модели введен ненаблюдаемый параметр  $\mu$ , мы провели расчеты для различных значений этого параметра, а также для различных горизонтов планирования  $T$ . Результаты приведены на диаграммах. Рис. 1 и 3 показывают зависимость максимального уровня дохода фирмы  $X_\tau$  на момент завершения периода инвестирования в рост при разных горизонтах планирования. На рисунке 1 – при относительно низком начальном уровне дохода  $x(0)$ . На рисунке 3 – при более высоком. Рисунки 2 и 4 показывают, насколько длительным должен быть оптимальный период инвестирования  $[0, \tau]$ , прежде чем компания перейдет к режиму выплаты дивидендов собственникам.

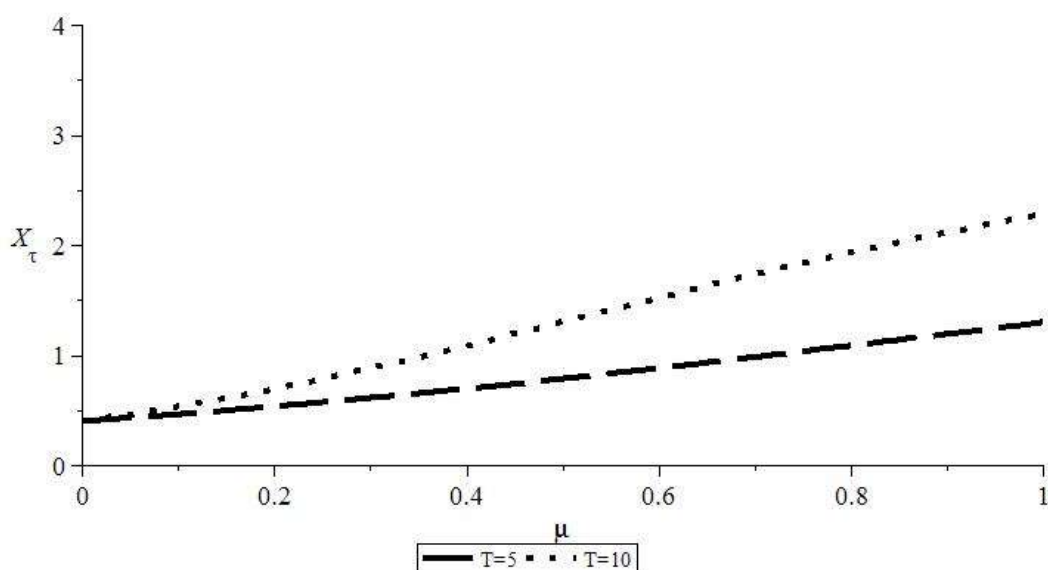


Рис. 1. Максимальный уровень дохода фирмы на момент завершения периода инвестирования в рост при разных горизонтах планирования  $T$ . Случай более низкого начального дохода фирмы

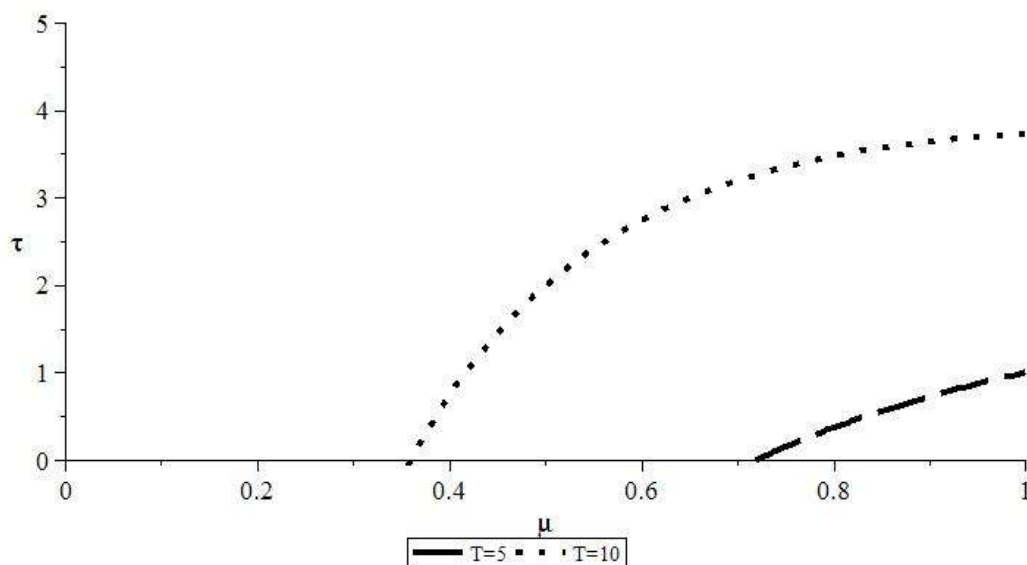


Рис. 2. Период вложения в расширение производства при разных горизонтах планирования  $T$ . Случай более низкого начального дохода фирмы

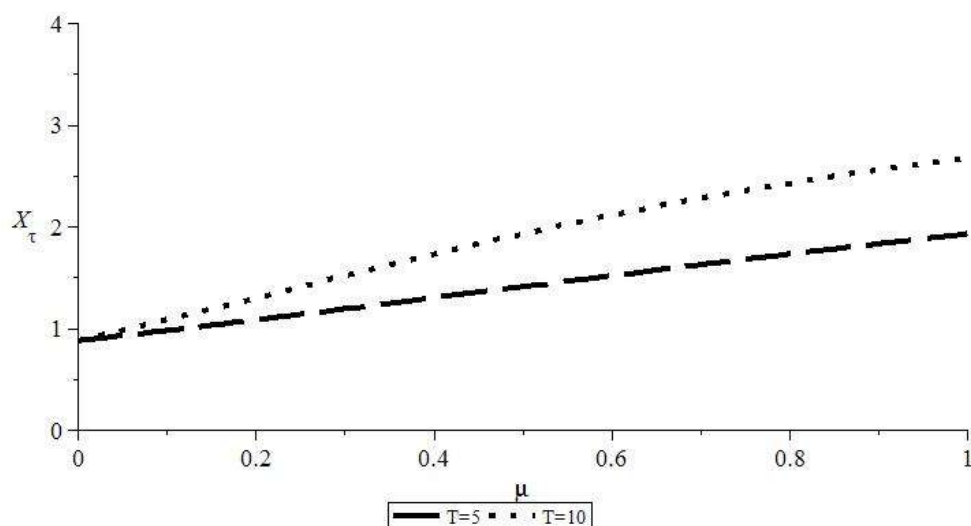


Рис. 3. Максимальный уровень дохода фирмы на момент завершения периода инвестирования в рост при разных горизонтах планирования  $T$ . Случай более высокого начального дохода фирмы

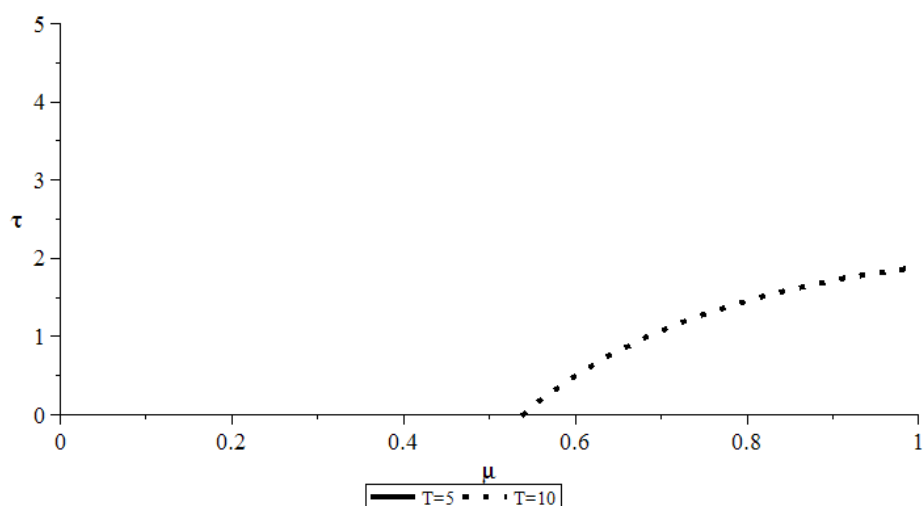


Рис. 4. Период вложения в расширение производства при разных горизонтах планирования  $T$ . Случай более высокого начального дохода фирмы

Интересной задачей является идентифицировать параметры представленной в данной работе модели, чтобы определить возможные значения, соответствующие наблюдаемой статистике.

#### 4. Заключение

В данной работе представлен модельный подход к задаче выбора оптимального режима вложений в рост. Показано, что оптимальное управление имеет структуру, при которой фирме вначале выгодно вкладывать максимально возможный объем средств в рост, а затем перейти к режиму выплат дивидендов собственникам. Проведены численные расчеты на основе параметров, идентифицированных в статьях [6, 7] для быстрорастущей компании. Приведены эксперименты для различных значений модельных параметров представленной в работе модели.

#### Литература

1. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006. – 144 с.
2. Flerova A., Zhukova A. Analysis of the model of optimal expansion of a firm // Advances in Optimization and Applications. OPTIMA 2022. Communications in Computer and Information Science. – V. 1739. – Cham: Springer Nature Switzerland, 2022. – P. 109–123.

3. *Flerova A., Rybkina E., Zhukova A.* Numerical analysis of a model of optimal production expansion with external financing // 2024 17th International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD). – IEEE, 2024. – P. 1–5.
4. *Flerova A., Zhukova A.* The Role of Inflation and Time Discounting in Production Expansion // 2022 4th International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – IEEE, 2022. – P. 245–250.
5. *Flerova A., Zhukova A.* Production expansion in presence of a bank account // Conference Proceedings: 2022 15th International Conference Management of large-scale system development (MLSD). – IEEE, 2022. – P. 1–4.
6. *Дранко О.И., Тароян К.К.* О модели прогнозирования выручки организации с быстрым ростом // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2023. – Т. 23. – № 4. – С. 66–75.
7. *Дранко О.И., Тароян К.К.* Прогнозирование выручки быстрорастущей компании с использованием логистической кривой // Автоматизация и моделирование в проектировании и управлении. – 2024. – № 2 (24). – С. 84–92.
8. *Delev A., Zhukova A., Flerova A.* Application of Machine Learning in the producer's optimal control problem with non-stable demand // 2022 8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT). IEEE, 2022. – Т. 1. – P. 867–871.
9. *Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E., Jeffrey D.J., Knuth D.E.* On the Lambert W function // Advances in Computational mathematics. – 1996. – №. 5. – P. 329–359.