ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С УЧЕТОМ ОБЪЕМА ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ИНФОРМАЦИИ

Горелов М.А.
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия
griefer@ccas.ru

Аннотация. Рассматривается задача принятия решений при наличии внешнего случайного фактора. Предполагается, что лицо, принимающее решения, может получать информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора, но должно учитывать затраты на обработку информации. Изучается структура решений в соответствующей двухкритериальной задаче.

Ключевые слова: принятие решений в условиях риска, теория информации, стохастическое программирование.

Введение

В докладе рассматривается задача выбора рационального решения по управлению системой, находящейся под воздействием внешнего случайного фактора. Предполагается, что цель управления задается как стремление к максимизации некоторой функции выигрыша. Считается, что лицо, принимающее решение, в принципе, может получить достоверную информацию о реализовавшемся значении случайного фактора. Но обработка этой информации требует затрат ресурсов, которые зависят от объема поступающей информации. И эти затраты приходится учитывать.

Существуют различные подходы к определению количества информации [1]. В данном докладе выбран подход, наиболее близкий к подходу, использованному в первых работах К. Шеннона [2]. А именно, предполагается, что информация о реализовавшихся значениях случайного фактора кодируется словами в бинарном алфавите и ее количество измеряется длиной соответствующего слова. В данной ситуации естественно предполагать, что информация кодируется оптимальным образом, или, что то же самое, что способ кодирования информации выбирается самой оперирующей стороной.

Оперирующая сторона предполагается риск-нейтральной, т.е. считается, что она стремится максимизировать математическое ожидание «основной» функции выигрыша и минимизировать математическое ожидание количества получаемой информации. Таким образом, оперирующая сторона решает задачу двухкритериальной оптимизации.

Такую модель можно рассматривать как некоторую детализацию моделей, изучаемых в теории стохастического программирования [3, 4]. А именно, в классической теории допускаются к рассмотрению в качестве решений достаточно произвольные функции случайного фактора, а в рассматриваемой модели эти функцию имеют некую дополнительную структуру. При этом в теории стохастического программирования акцент чаще всего делается на построение эффективных вычислительных методов. В данной работе, в основном, изучаются качественные свойства стратегий, которые могут считаться оптимальными.

В содержательном смысле рассматриваемая модель, пожалуй, ближе всего к задачам «на взвешивания». Эти задачи давно популярны в книгах по занимательной математике, но до сих пор остаются предметом интереса профессиональных математиков [5–8]. Как в задачах «на взвешивания», так и в рассматриваемой модели речь идет о поиске оптимальных способов получения информации и, в отличие от классической теории информации, учитывается ее прагматическая ценность.

1. Модель принятия решений

Будем рассматривать модель следующей ситуации. Предположим, что оперирующая сторона принимает решение в условиях, когда получаемый ею результат зависит не только от сделанного выбора, но и от каких-то внешних факторов. В принципе, она может получить достоверную информацию об этих внешних факторах, но объем этой информации может оказаться очень большим, и с этим нужно считаться. Таким образом, оперирующей стороне нужно найти компромисс между желанием увеличить значение критерия, характеризующего качество управления, и желанием снизить объем используемой информации. Будем предполагать, что оперирующей стороне известно некое вероятностное определение на множестве неопределенных факторов, и она склонна ориентироваться на математические ожидания значений своего «основного» критерия и объема поступающей информации. Формализуем сказанное следующим образом.

Пусть оперирующая сторона выбирает свое управление u из множества U. Кроме того, на результат управления влияет значение неопределенного фактора α. Оперирующей стороне известно множество A всех возможных значений этого неопределенного фактора. Интересы оперирующей стороны описываются стремлением к увеличению значения функции g, отображающей декартово произведение $U \times A$ в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

На множестве A задана вероятностная мера $\wp$. Оператор вычисления математического ожидания по этой мере будем обозначать буквой M. Других мер в данной работе рассматриваться не будет, поэтому такое обозначение не должно вызвать недоразумений.

Будем предполагать, что оперирующая сторона получает информацию о реализовавшемся значении неопределенного фактора α в виде слов в алфавите $\{0,1\}$. Обозначим множество всех таких слов через Ξ. Удобно считать, что пустое слово Λ принадлежит множеству Ξ. Пусть $l(s)$ – длина слова s. Разумеется, $l(\Lambda) = 0$.

Будем считать, что способ кодировки информации имеет право выбирать сама оперирующая сторона. Таким образом, она выбирает отображение $P: A \to \Xi$. Множество Ξ является счетным, поэтому на нем задана σ-алгебра, которой принадлежат все одноэлементные подмножества множества Ξ. В рассматриваемой модели естественно считать, что отображение P является измеримым. Множество всех таких отображений обозначим через $\Psi(A, \Xi)$.

Получив информацию $s = P(\alpha)$ о реализовавшемся значении неопределенного фактора α, оперирующая сторона может выбрать произвольное управление $u \in U$. Удобно считать, что полный план своих действий на все случаи оперирующая сторона выбирает заранее. Тогда можно говорить, что оперирующая сторона выбирает функцию $u_*: \Xi \to U$. Множество всех таких функций обозначим через $\Phi(\Xi, U)$.

Пару (u_*, P) естественно назвать стратегией оперирующей стороны. Пусть $U_\# = \Phi(\Xi,U) \times \Psi(A, \Xi)$ – множество всех стратегий.

Если зафиксирована стратегия (u_*, P) и реализовалось значение неопределенного фактора $\alpha \in A$, то оперирующая сторона получит сообщение $P(\alpha)$, выберет управление $u_*(P(\alpha))$, и в результате значение ее критерия составит $g(u_*(P(\alpha)),\alpha)$. Поскольку мы предполагаем оперирующую сторону риск-нейтральной, одной из ее целей будет выбор стратегии $(u_*, P) \in U_\#$, максимизирующей значение $R(u_*, P) = \mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)$.

Так как параметр α считается случайным, длина $l(P(\alpha))$ получаемого оперирующей стороной сообщения тоже будет случайной. Предположим, что второй целью оперирующей стороны является выбор стратегии $(u_*, P) \in U_\#$, минимизирующей математическое ожидание $L(u_*, P) = \mathrm{M}l(P(\alpha))$ этой длины.

Таким образом, мы получили полное описание рассматриваемой двухкритериальной задачи.

Обозначим через $P^{-1}(s) = \{\alpha \in A: P(\alpha) = s\}$ полный прообраз слова s при отображении P. Тогда по определению

$$R(u_*,P) = \sum_{s\in\Xi} \int\limits_{\alpha\in P^{-1}(s)} g(u_*(s),\alpha)\wp(d\alpha),$$

$$L(u_*,P) = \sum_{s\in\Xi} l(s)\wp(P^{-1}(s)).$$

Удобно использовать следующую нумерацию слов s из множества Ξ. Припишем слева к слову s, букву 1. Получившееся слово $1s$ можно рассматривать как двоичную запись некоторого натурального числа k. Номер k присвоим слову s. Понятно, что таким образом каждому слову $s \in \Xi$ будет присвоен единственный номер $k \in \mathbb{N}$. Обратно, для каждого натурального числа k существует единственное слово s_k, номером которого является число k.

Длина слова s_k определяется простой формулой $l(s_k) = [\log k]$ (здесь и далее используются двоичные логарифмы, а квадратные скобки в данном случае означают целую часть числа).

Последовательность $l(s_1), l(s_2), \ldots$ не убывает.

Используя данную нумерацию можно записать критерии задачи в виде

$$R(u_*,P) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha\in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha),$$

$$L(u_*,P)=\sum_{i=1}^{\infty} l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i)).$$

Чтобы избежать неинтересных технических трудностей, сделаем следующие естественные предположения. Множества U и A будем считать наделенными топологиями и компактными. Функцию g будем предполагать непрерывной на декартовом произведении $U\times A$. Меру $\wp$ будем считать борелевской.

2. Некоторые оценки

Начнем с двух оценок. Обозначим

$$R_-=\max_{u\in U}\mathrm{M}g(u,\alpha),\ R_+=\mathrm{M}\max_{u\in U}g(u,\alpha), R_{\max}=\sup_{(u_*,P)\in U_\#}\mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha).$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Имеют место неравенства $R_-\le R_{\max}\le R_+$.

Доказательство. Пусть функция $Q\in\Psi(A,\Xi)$ тождественно равна s_1. Тогда справедливо включение $U_{\#Q}=\{(u_*,Q)\colon u_*\in\Phi(\Xi,U)\}\subset U_\#$. Поэтому

$$R_{\max}=\sup_{(u_*,P)\in U_\#}\mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)\ge\sup_{(u_*,P)\in U_{\#Q}}\mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)=\sup_{(u_*,P)\in U_{\#Q}}\mathrm{M}g(u_*(Q(\alpha)),\alpha)=$$
$$=\sup_{(u_*,P)\in U_{\#Q}}\mathrm{M}g(u_*(s_1),\alpha)=\sup_{u_*\in\Phi(\Xi,U)}\mathrm{M}g(u_*(s_1),\alpha)=\sup_{u\in U}\mathrm{M}g(u,\alpha)=R_-,$$

что доказывает левое неравенство.

Композиция $u_*\circ P$ функций u_* и P принадлежит классу $\Phi(A,U)$ всех функций из множества A в множество U. Следовательно,

$$R_{\max}=\sup_{(u_*,P)\in U_\#}\mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)\le\sup_{u_{**}\in\Phi(A,U)}\mathrm{M}g(u_{**}(\alpha),\alpha)=\mathrm{M}\sup_{u\in U}g(u(\alpha),\alpha)=R_+.$$

Лемма доказана.

Содержательный смысл доказанного утверждения понятен. Оперирующая сторона имеет право отказаться использовать получаемую информацию. Поэтому ее оптимальный выигрыш в рассматриваемой задаче не может быть меньше, чем в случае, когда информации нет вовсе. С другой стороны, этот выигрыш не может быть больше, чем в случае, когда оперирующая сторона точно знает значение неопределенного фактора.

При сделанных топологических предположениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Имеет место равенство $R_{\max}=R_+$.

Доказательство. Пусть задано произвольное число $\varepsilon>0$. Положим $\phi(\alpha)=\max_{u\in U}g(u,\alpha)$. Эта функция непрерывна [9]. Следовательно, множества $O_\varepsilon(u)=\{\alpha\in A\colon \phi(\alpha)-g(u,\alpha)<\varepsilon\}$ открыты. Если u доставляет максимум в определении функции $\phi(\alpha)$, то $\alpha\in O_\varepsilon(u)$. Поэтому множества $O_\varepsilon(u)$ покрывают пространство A. Так как это пространство предполагается компактным, можно выбрать такие элементы $u_1,u_2,\ldots,u_n$ множества U, что множества $O_\varepsilon(u_1)$, $O_\varepsilon(u_2),\ldots,O_\varepsilon(u_n)$ тоже будут покрывать пространство A.

Пусть $P(\alpha)=s_i$, где i – наименьший номер i , для которого $\alpha\in O_\varepsilon(u_i)$. Так как $O_\varepsilon(u_1)$, $O_\varepsilon(u_2),\ldots,O_\varepsilon(u_n)$ – покрытие, это условие корректно определяет функцию $P\in\Phi(A,\Xi)$. Функция P определена так, что $P^{-1}(s_1)=O_\varepsilon(u_1)$, $P^{-1}(s_2)=O_\varepsilon(u_2)\setminus O_\varepsilon(u_1)$, $P^{-1}(s_2)=O_\varepsilon(u_3)\setminus(O_\varepsilon(u_1)\bigcup O_\varepsilon(u_2)),\ldots$ Множества $O_\varepsilon(u_k)$ открыты, а мера $\wp$ предполагается борелевской. Поэтому функция P измерима, то есть $P\in\Psi(A,\Xi)$.

Пусть функция u_* удовлетворяет условиям $u_*(s_i)=u_i$ при $i=1,2,\ldots,n$ (при остальных i ее значения можно выбрать произвольно).

Для такой стратегии (u_*,P) при любом $\alpha\in A$ выполняется включение $\alpha\in O_\varepsilon(u_*(P(\alpha)))$. Следовательно, для любого $\alpha\in A$ истинно неравенство $g(u_*(P(\alpha)),\alpha)>\phi(\alpha)-\varepsilon$. Значит, $\mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)\ge\mathrm{M}\phi(\alpha)-\varepsilon=R_+-\varepsilon$. Тем более справедливо неравенство

$$R_{\max}=\sup_{(u_*,P)\in U_\#}\mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)\ge R_+-\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, отсюда следует, что $R_{\max}\ge R_+$. Вместе с верхней оценкой величины $R_{\max}$ из леммы 1 это доказывает лемму 2.

Назовем стратегию финитной, если $P^{-1}(s) \neq \varnothing$ лишь для конечного числа слов s (здесь и далее равенство подмножеств пространства A можно понимать с точностью до множеств меры ноль).

Приведем два следствия леммы 2, подчеркивающие адекватность рассматриваемой постановки задачи.

Следствие 1. Если $\varepsilon > 0$, то существует финитная стратегия (u_*, P), для которой $R(u_*, P) > R_+ - \varepsilon$.

Следствие 2. Если $\varepsilon > 0$, то существует стратегия (u_*, P), для которой $R(u_*, P) > R_+ - \varepsilon$ и $L(u_*, P) < \infty$.

В случае $R_- = R_+$ рассматриваемая задача сводится к задаче максимизации. Действительно, выберем u_0 так, что $\mathrm{M}g(u_0,\alpha) = \max\limits_{u\in U} \mathrm{M}g(u,\alpha)$. Положим $u_*(s_i) \equiv u_0$, $P(\alpha) \equiv s_1$. Для этой стратегии $R(u_*, P) = R_+$ и $L(u_*, P) = 0$, т.е. оба критерия принимают свои оптимальные значения. Таким образом, построенную стратегию (u_*, P) с полным правом можно считать решением задачи. Нетривиальным остается только поиск управления u_0. Разумеется, в этом случае максимум $\max\limits_{(u_*,P)\in U_\#} R(u_*,P)$ достигается.

К сожалению, в случае $R_- < R_+$ верхняя грань в определении величины $R_{\max}$ может не достигаться.

Пример 1. Пусть $U = A = [0,1]$, $g(u,\alpha) = -(u-\alpha)^2$, а $\wp$ – мера Лебега.

Очевидно, при любом $\alpha \in A$ имеем $\max\limits_{u\in U} g(u,\alpha) = 0$. Поэтому $R_+ = R_{\max} = 0$.

Пусть (u_*, P) – произвольная стратегия. Множества $P^{-1}(s_1)$, $P^{-1}(s_2)$,… образуют разбиение пространства A, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{\infty} P^{-1}(s_i) = 1$. Значит, одно из этих множеств $P^{-1}(s_n)$ имеет положительную меру $p = \wp(P^{-1}(s_n))$. Но тогда мера множества $D = P^{-1}(s_n) \setminus \left[u_*(s_n) - \frac{p}{4}, u_*(s_n) + \frac{p}{4} \right]$ тоже положительна. Но на множестве D значение функции $g(u_*(P(\alpha)),\alpha) = g(u_*(s_n),\alpha) \le -\frac{p^2}{16}$. А так как функция g не положительна, имеем

$$R(u_*,P) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha\in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha) \le \int\limits_{\alpha\in P^{-1}(s_n)} g(u_*(s_n),\alpha)\wp(d\alpha) \le \int\limits_{\alpha\in D} g(u_*(s_n),\alpha)\wp(d\alpha) < 0.$$

Конструкции данного примера подсказывают следующий общий результат.

Лемма 3. Обозначим $T(u) = \left\{ \alpha \in A : g(u,\alpha) = \max\limits_{v\in U} g(v,\alpha) \right\}$. Максимум $\max\limits_{(u_*,P)\in U_\#} R(u_*,P)$ достигается тогда и только тогда, когда существует такое не более чем счетное множество $V = \{v_1, v_2, \dots\}$, что мера множества $T^0 = A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T(v_i)$ равна нулю.

Доказательство. Необходимость. Пусть стратегия (u_*, P) доставляет искомый максимум. Определим функцию $u_{**} \in \Phi(A,U)$ так, что $g(u_{**}(\alpha),\alpha) = \max\limits_{v\in U} g(v,\alpha)$ при всех $\alpha \in A$. Тогда

$$\int\limits_{\alpha\in A} g(u_*(P(\alpha)),\alpha)\wp(d\alpha) = \mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha) = R_{\max} = R_+ = \int\limits_{\alpha\in A} g(u_{**}(\alpha),\alpha)\wp(d\alpha).$$

Поскольку $g(u_*(P(\alpha)),\alpha) \le g(u_{**}(\alpha),\alpha)$ при всех $\alpha \in A$, отсюда следует, что мера множества

$$T^{\neq} = \{ \alpha \in A : g(u_*(P(\alpha)),\alpha) < g(u_{**}(\alpha),\alpha) \}$$

равна нулю.

Положим $v_i = u_*(s_i)$. Тогда $T(v_i) = P^{-1}(s_i) \setminus T^{\neq}$. Поскольку

$$T^0 = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} T(v_i) = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (P^{-1}(s_i) \setminus T^{\#}) = \left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} P^{-1}(s_i) \right) \bigcup T^{\#} = (A \setminus A) \bigcup T^{\#} = T^{\#},$$

его мера равна нулю. Следовательно, множество $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ – искомое.

Достаточность. Пусть множество $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ удовлетворяет условиям леммы. Определим функцию $u_* \in \Phi(\Xi,U)$ условиями $u_*(s_i) = v_i$. Положим $P(\alpha) = s_1$, если $\alpha \in T^0$, и $P(\alpha) = s_i$, если $\alpha \in T(v_i)$, $i = 1,2,\dots$ Множества $T(v_i)$ замкнуты, а мера $\wp$ предполагается борелевской. Поэтому так определенное отображение P.

Вне множества T^0 справедливо равенство $g(u_*(P(\alpha)),\alpha) \le g(u_{**}(\alpha),\alpha)$. Следовательно,

$$\mathrm{M}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)=\int\limits_{\alpha\in A} g(u_*(P(\alpha)),\alpha)\wp(d\alpha)=\int\limits_{\alpha\in A} g(u_{**}(\alpha),\alpha)\wp(d\alpha)=R_{\max}.$$

Таким образом, построенная стратегия (u_*, P) доставляет максимум $\max\limits_{(u_*,P)\in U_\#} R(u_*,P)$.

Лемма доказана.

Из полученных результатов видно, что задачи, в которых верхняя грань $\sup\limits_{(u_*,P)\in U_\#} R(u_*,P)$ не достигается ни в коем случае не являются вырожденными. Во многих конкретных случаях проверка условий леммы не составляет сколько-нибудь значительной трудности. В общем случае задача, о поиске более конструктивных способов проверки этих условий (видимо, чисто топологическая) остается открытой. Но ее решение остается за рамками данной работы.

3. Финитные стратегии

В классической теории стохастического программирования, например, в качестве стратегий, по существу, рассматриваются произвольные измеримые функции из множества A в множество U. В рассматриваемой постановке класс стратегий сужен: к рассмотрению допускаются лишь функции из A в U, представимые в виде суперпозиции $u_*\circ P$. Такая постановка, разумеется, более реалистична. Тем не менее, стратегии (u_*, P), у которых множество значений функции P бесконечно, безусловно, являются математической абстракцией. Лемма из данного раздела позволяет в значительной степени разобраться с тем, насколько существенна эта абстракция.

Обозначим через $U_\#^\omega$ – множество всех финитных стратегий. Очевидно, $U_\#^\omega\subset U_\#$.

Определим множества

$$\mathfrak{R}=\left\{(R(u_*,P),L(u_*,P))\in\mathbb{R}^2:(u_*,P)\in U_\#\right\},$$

$$\mathfrak{R}^\omega=\left\{(R(u_*,P),L(u_*,P))\in\mathbb{R}^2:(u_*,P)\in U_\#^\omega\right\}.$$

Так как $U_\#^\omega\subset U_\#$, выполняется включение $\mathfrak{R}^\omega\subset\mathfrak{R}$.

Лемма 4. Множество $\mathfrak{R}^\omega$ всюду плотно в множестве $\mathfrak{R}$ в евклидовой топологии пространства $\mathbb{R}^2$.

Доказательство. Непрерывная функция g определена на декартовом произведении двух компактов. Следовательно, она ограничена. Выберем число R_* так, что $\left|g(u,\alpha)\right|\le R_*$ для всех $(u,\alpha)\in U\times A$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon>0$. Пусть задана произвольная точка (R^0, L^0) множества $\mathfrak{R}$. Тогда существует стратегия (u_*, P), для которой $R(u_*, P) = R^0$ и $L(u_*, P) = L^0$. Зафиксируем такую стратегию.

Ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\wp(P^{-1}(s_i))=1$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty}l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))=L(u_*,P)$ сходятся, разумеется, абсолютно. В силу ограниченности функции g ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_{\alpha\in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha)=R(u_*,P)$ тоже абсолютно сходится. Поэтому можно выбрать такое m, что $0<\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}\wp(P^{-1}(s_i))<\dfrac{\varepsilon}{R_*}$, $0<\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))<\varepsilon$ и $\left|\sum\limits_{i=m+1}^{\infty}\int\limits_{\alpha\in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha)\right|<\varepsilon$.

Пусть отображение $Q\in\Psi(A,\Xi)$ построено следующим образом. Если $\alpha\in P^{-1}(s_i)$ и $i\le m$, то $Q(\alpha)=s_i$. А если $\alpha\in P^{-1}(s_i)$ и $i>m$, то $Q(\alpha)=s_1$. Поскольку для любого $\alpha\in A$ найдется i, для которого $\alpha\in P^{-1}(s_i)$, функция Q определена на всем множестве A. А так как для любого i множество $Q^{-1}(s_i)$ является объединением множеств $P^{-1}(s_j)$, функция Q измерима.

Очевидно, стратегия (u_*, P) финитна. Следовательно, точка $(R(u_*, Q),L(u_*, Q))\in\mathfrak{R}^\omega$.

По построению

$$L^0-L(u_*,Q)=L(u_*,P)-L(u_*,Q)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))-l(s_1)\wp\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty}P^{-1}(s_i)\right)-\sum_{i=1}^{m}l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))=\sum_{i=m+1}^{\infty}l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))$$

(так как $l(s_1) = 0$). Поэтому, $0 < L^0 - L(u_*, Q) < \varepsilon$.

Кроме того,

$$\left|R^0 - R(u_*, Q)\right| = \left|R(u_*, Q) - R(u_*, Q)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i), \alpha)\wp(d\alpha) - \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i), \alpha)\wp(d\alpha) - \sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_1), \alpha)\wp(d\alpha)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i), \alpha)\wp(d\alpha) - = -\sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_1), \alpha)\wp(d\alpha)\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i), \alpha)\wp(d\alpha)\right| + \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_1), \alpha)\wp(d\alpha)\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i), \alpha)\wp(d\alpha)\right| + R_* \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} \wp(d\alpha)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} \int\limits_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i), \alpha)\wp(d\alpha)\right| + R_* \left|\sum_{i=m+1}^{\infty} l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))\right| < 2\varepsilon.$$

Поскольку точка (R^0, L^0) и число ε выбирались произвольно, лемма доказана.

4. Об оптимальных способах кодирования информации

Сначала сформулируем один вспомогательный результат. Следующее утверждение обобщает классическое перестановочное неравенство на случай бесконечного числа слагаемых.

Лемма 5. Пусть заданы неубывающая последовательность неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots$, невозрастающая последовательность неотрицательных чисел $b_1, b_2, \ldots$ и биективное отображение σ множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в себя. Тогда, если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_{\sigma(i)}$ сходится, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ тоже сходится и справедливо неравенство $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_{\sigma(i)}$.

Доказательство. Для $k = 1, 2, \ldots$ определим последовательности $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots$ следующими условиями: при $i \le k$ выполняются равенства $b_i^{(k)} = b_i$, а при $i > k$ – равенства $b_i^{(k)} = 0$. Тогда по определению $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i^{(k)}$ и $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i^{(k)}$.

Обозначим $m_k = \max_{1 \le i \le k} \sigma(i)$.

В силу выбора последовательности $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \ldots$ имеем $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{m_k} a_i b_i^{(k)}$. Из перестановочного неравенства (см., например, теорему 368 из [10]) следует неравенство $\sum_{i=1}^{m_k} a_i b_i^{(k)} \le \sum_{i=1}^{m_k} a_i b_{\sigma(i)}^{(k)}$. Наконец, $\sum_{i=1}^{m_k} a_i b_{\sigma(i)}^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_{\sigma(i)}^{(k)} \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_{\sigma(i)}$. Таким образом, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(k)} \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_{\sigma(i)}$.

В силу не отрицательности чисел a_i и b_i, последовательность $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(1)}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i^{(2)} \ldots$ не убывает. А в силу предыдущего неравенства она ограничена сверху числом $\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_{\sigma(i)}$. Это доказывает лемму.

Вернемся к основной задаче. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. Для любой стратегии (u_*, Q) существует такое отображение $P \in \Psi(A, \Xi)$, что $R(u_*, P) = R(v_*, Q)$, $L(u_*, Q) \le L(u_*, P)$ и последовательность $\wp(P^{-1}(s_1))$, $\wp(P^{-1}(s_2)), \ldots$ не возрастает.

Доказательство. Поскольку (v_*,Q) – стратегия, функция Q измерима и справедливо равенство $\sum_{i=1}^{\infty}\wp(Q^{-1}(s_i))=1$. Значит, последовательность $\wp(P^{-1}(s_1))$, $\wp(P^{-1}(s_2)),\dots$ стремится к нулю. А тогда существует наибольший по величине член этой последовательности, быть может, не один. Зафиксируем один из таких членов $\wp(Q^{-1}(s_k))$ и положим $\sigma(1) = k$. Выбрав наибольший из оставшихся членов $\wp(Q^{-1}(s_i))$, положим $\sigma(2) = i$. Эту процедуру можно продолжать до бесконечности. В результате будет определена биекция σ множества натуральных чисел в себя.

Пусть отображение P определяется условием: $P(\alpha) = s_i$ в том и только том случае, когда $Q(\alpha) = s_{\sigma(i)}$. Поскольку $P^{-1}(s_i) = Q^{-1}(s_{\sigma(i)})$, отображение P измеримо. По построению последовательность $\wp(P^{-1}(s_1))$, $\wp(P^{-1}(s_2)),\dots$ не возрастает. При выбранном способе нумерации слов s_i последовательность $l(s_1),l(s_2),\dots$ не убывает. Таким образом, выполнены условия леммы 5 и потому справедливо неравенство $L(v_*,Q) \le L(u_*,P)$.

Функция g непрерывна и определена на декартовом произведении двух компактов. Следовательно, существует такое число R_*, что $|g(u,\alpha)| \le R_*$ для всех $(u,\alpha) \in U \times A$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_{\alpha\in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha)\right| \le R_*\sum_{i=1}^{\infty}\wp(P^{-1}(s_i)) = R_*.$$

Значит, интересующий нас ряд $R(u_*,P)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\alpha\in P^{-1}(s_i)} g(u_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha)$ сходится абсолютно. А ряд $R(v_*,Q)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\alpha\in Q^{-1}(s_i)} g(v_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha)$ получается из него изменением порядка слагаемых. Поэтому $R(u_*, P) = R(v_*,Q)$.

Лемма доказана.

Таким образом, если искать оптимальные по Парето стратегии (u_*,P) в рассматриваемой двухкритериальной задаче, то можно ограничиться рассмотрением таких стратегий, у которых последовательность $\wp(P^{-1}(s_1))$, $\wp(P^{-1}(s_2)),\dots$ не возрастает. Продолжая эту тему, можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 7. Пусть стратегия (u_*,P) оптимальна по Парето в рассматриваемой задаче и последовательность $\wp(P^{-1}(s_1))$, $\wp(P^{-1}(s_2)),\dots$ не возрастает. Тогда для почти всех $\alpha \in A$ (в смысле меры $\wp$) выполняется условие: если $P(\alpha) = s_i$ и $j < i$, то $g(u_*(s_i),\alpha) \ge g(u_*(s_j),\alpha)$.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется номер i, множество $B \subset P^{-1}(s_i)$, имеющее положительную меру, и номер $j < i$, для которых $g(u_*(s_i),\alpha) < g(u_*(s_j),\alpha)$.

Определим отображение Q условиями: $Q(\alpha) = s_j$, если $\alpha \in B$, и $Q(\alpha) = P(\alpha)$ во всех остальных случаях. По построению $Q^{-1}(s_i) = P^{-1}(s_i) \setminus B$, $Q^{-1}(s_j)=P^{-1}(s_j)\cup B$ и $Q^{-1}(s_k) = P^{-1}(s_k)$ для $k \ne i,j$. Поэтому функция Q измерима и (u_*,Q) – стратегия.

Тогда

$$L(u_*,P)-L(u_*,Q)=\sum_{s\in\Xi} l(s)\wp(P^{-1}(s))-\sum_{s\in\Xi} l(s)\wp(Q^{-1}(s))=$$

$$=l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i)+l(s_j)\wp(P^{-1}(s_j)-l(s_i)\wp(Q^{-1}(s_i)-l(s_j)\wp(Q^{-1}(s_j)=$$

$$=l(s_i)\wp(P^{-1}(s_i))+l(s_j)\wp(P^{-1}(s_j))-l(s_i)(\wp(P^{-1}(s_i))-\wp(B))-(l(s_j)(\wp(Q^{-1}(s_j))+\wp(B))=$$

$$=(l(s_i)-l(s_j))\wp(B)\ge 0,$$

следовательно, $L(v_*,Q) \le L(u_*,P)$.

Кроме того,

$$R(u_*,P)-R(u_*,Q)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha\in P^{-1}(s_k)} g(u_*(s_k),\alpha)\wp(d\alpha)-\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\alpha\in Q^{-1}(s_k)} g(u_*(s_k),\alpha)\wp(d\alpha)=$$

$$=\int_{\alpha\in B} g(u_*(s_i),\alpha)\wp(d\alpha)-\int_{\alpha\in B} g(u_*(s_j),\alpha)\wp(d\alpha)=\int_{\alpha\in B}(g(u_*(s_i),\alpha)-g(u_*(s_j),\alpha))\wp(d\alpha)<0,$$

значит, $R(u_*, P) < R(v_*,Q)$.

Два полученных неравенства противоречат оптимальности стратегии (u_*, P). Поэтому сделанное предположение не верно, и лемма доказана.

Полученный результат наводит на мысль об использовании «жадных» алгоритмов [11] для решения рассматриваемой задачи, хотя бы в качестве эвристики.

5. Линейная свертка критериев

Удобный способ поиска оптимальных по Парето стратегий состоит в поиске стратегий, максимизирующих их линейную свертку. Впрочем, эта свертка может иметь и самостоятельное значение. Например, если значение функции g интерпретируется как доход оперирующей стороны, выраженный в денежных единицах, то из этих доходов разумно вычесть расходы на обработку информации. Эти расходы во многих случаях можно считать пропорциональными объему используемой информации. По этой причине рассмотрим задачу максимизации линейной свертки $\rho R(u_*, P) - \rho_0 L(u_*, P)$, где ρ и ρ_0 – какие-то неотрицательные числа, не равные нулю одновременно.

Случай $\rho_0 = 0$, фактически, подробно рассмотрен в разделе 2.

Случай $\rho = 0$ мало интересен. В этом случае для оптимальной стратегии (u_*, P) имеем $L(u_*, P) = 0$, при этом стратегию можно выбрать так, что $R(u_*, P) = R_-$ и лучшего результата добиться невозможно.

Поэтому будем полагать, что оба коэффициента ρ и ρ_0 строго положительны. В таком случае, не ограничивая общности, можно считать, что $\rho_0 = 1$ и рассматривать свертку $\rho R(u_*, P) - L(u_*, P)$.

Прежде всего, воспользуемся результатом леммы 6. Из него непосредственно следует, что при поиске оптимальных стратегий (u_*, P) можно ограничиться рассмотрением таких стратегий, у которых последовательность $\wp(P^{-1}(s_1))$, $\wp(P^{-1}(s_2)),\ldots$ не возрастает. Далее буде предполагать, что это условие выполнено.

Далее заметим, что оптимальная стратегия непременно финитна, причем можно получить явную оценку числа множеств $P^{-1}(s_i)$, имеющих ненулевую меру.

Действительно, пусть, как и прежде, число R_* таково, что $|g(u,\alpha)| \le R_*$ для всех $(u,\alpha) \in U \times A$. Фиксируем число m так, что $l(s_{m+1}) > 2\rho R_*$. Пусть (u_*, Q) – произвольная стратегия и множество $B = \bigcup_{j=m+1}^{\infty} Q^{-1}(s_j)$ имеет положительную меру.

Определим функцию $P \in \Psi(A, \Xi)$ условиями: $P(\alpha) = s_1$, если $\alpha \in B$ и $P(\alpha) = Q(\alpha)$ во всех остальных случаях. Тогда имеем

$$(\rho R(u_*,Q) - L(u_*,Q)) - (\rho R(u_*,P) - L(u_*,P)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\alpha \in Q^{-1}(s_i)} (g(u_*(s_i),\alpha) - \rho l(s_i))\wp(d\alpha) - \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\alpha \in P^{-1}(s_i)} (g(u_*(s_i),\alpha) - \rho l(s_i))\wp(d\alpha) =$$

$$= \int_{\alpha \in Q^{-1}(s_1)} (g(u_*(s_1),\alpha) - \rho l(s_1))\wp(d\alpha) + \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_{\alpha \in Q^{-1}(s_j)} (g(u_*(s_j),\alpha) - \rho l(s_j))\wp(d\alpha) -$$

$$- \int_{\alpha \in Q^{-1}(s_1)} (g(u_*(s_1),\alpha) - \rho l(s_1))\wp(d\alpha) - \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_{\alpha \in Q^{-1}(s_j)} (g(u_*(s_j),\alpha) - \rho l(s_j))\wp(d\alpha) =$$

$$= \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_{\alpha \in Q^{-1}(s_j)} (g(u_*(s_j),\alpha) - \rho l(s_j))\wp(d\alpha) - \sum_{j=m+1}^{\infty} \int_{\alpha \in Q^{-1}(s_j)} (g(u_*(s_1),\alpha) - \rho l(s_1))\wp(d\alpha),$$

поскольку $P^{-1}(s_j) = \varnothing$ при $j > m$, а $P^{-1}(s_1) = Q^{-1}(s_1) \bigcup B$. Далее, так как $l(s_1) = 0$, получим

$$(\rho R(u_*,Q)-L(u_*,Q))-(\rho R(u_*,P)-L(u_*,P))\le$$

$$\le\sum_{j=m+1}^{\infty}\int_{\alpha\in Q^{-1}(s_j)}(g(u_*(s_j),\alpha)-g(u_*(s_1),\alpha))\wp(d\alpha)-\rho l(s_{m+1})\wp(B)\le$$

$$\le\sum_{j=m+1}^{\infty}\int_{\alpha\in Q^{-1}(s_j)}2R_*\wp(d\alpha)-\rho l(s_{m+1})\wp(B)\le$$

$$\le\int_{\alpha\in B}2R_*\wp(d\alpha)-\rho l(s_j)\wp(B)=2R_*\wp(B)-\rho l(s_j)\wp(B)=$$

$$=(2R_*-\rho l(s_j)\wp(B)<0.$$

Следовательно, $\rho R(u_*, P)-\rho_0 L(u_*, P)>\rho R(u_*, Q)-\rho_0 L(u_*, Q)$ и стратегия (u_*, Q) не является оптимальной.

Пусть теперь стратегия (u_*, P) такова, что $P^{-1}(s_j)=\varnothing$ при $j>m$. Зафиксируем функцию u_* и обозначим $u_i=u_*(s_i)$, $i=1,2,\ldots,m$. Тогда

$$\rho R(u_*,P)-L(u_*,P)=\rho\int_{\alpha\in A}g(u_*(P(\alpha)),\alpha)\wp(d\alpha)-\int_{\alpha\in A}l(P(\alpha))\wp(d\alpha)=$$

$$=\int_{\alpha\in A}(\rho g(u_*(P(\alpha)),\alpha)-l(P(\alpha)))\wp(d\alpha)\le\int_{\alpha\in A}\max_{1\le i\le m}(\rho g(u_*(s_i),\alpha)-l(s_i))\wp(d\alpha).$$

Тем более

$$\rho R(u_*,P)-L(u_*,P)\le\max_{(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in U^m}\int_{\alpha\in A}\max_{1\le i\le m}(\rho g(u_*(s_i),\alpha)-l(s_i))\wp(d\alpha).$$

Из стандартных теорем математического анализа следует, что функция $\max_{(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in U^m}\int_{\alpha\in A}\max_{1\le i\le m}(g(u_*(s_i),\alpha)-l(s_i))\wp(d\alpha)$ от переменных $u_1,u_2,\ldots,u_m$ непрерывна. Тогда она достигает максимума на компактном множестве U^m. Пусть этот максимум достигается в точке $(u_1^0,u_2^0,\ldots,u_m^0)$.

Определим функцию u_*^0 условиями $u_*^0(s_i)=u_i^0$, $i=1,2,\ldots,m$ (для $i>m$ ее значения можно выбрать произвольно), а функцию P^0 – условием: $P^0(\alpha)=s_i$, если i – наименьший номер, для которого верно равенство $\rho g(u_*(s_i),\alpha)-l(s_i)=\max_{1\le j\le m}(\rho g(u_*(s_j),\alpha)-l(s_j))$. По построению множество $(P^0)^{-1}(s_1)=\left\{\alpha\in A:\rho g(u_*(s_1),\alpha)-l(s_1)=\max_{1\le j\le m}(\rho g(u_*(s_j),\alpha)-l(s_j))\right\}$ замкнуто, и, следовательно, измеримо. Далее по индукции проверяется, что множества

$$(P^0)^{-1}(s_i)=\left\{\alpha\in A:\rho g(u_*(s_i),\alpha)-l(s_i)=\max_{1\le j\le m}(\rho g(u_*(s_j),\alpha)-l(s_j))\right\}\setminus\bigcup_{j=1}^{i-1}(P^0)^{-1}(s_j)$$

измеримы для $i=2,3,\ldots m$. При $i>m$ множества $(P^0)^{-1}(s_i)$ по определению пусты. Следовательно, функция P^0 измерима и (u_*^0,P^0) – стратегия.

Для этой стратегии имеем

$$\rho R(u_*^0,P^0)-L(u_*^0,P^0)=\int_{\alpha\in A}(\rho g(u_*^0(P^0(\alpha)),\alpha)-l(P^0(\alpha)))\wp(d\alpha)=$$

$$=\int_{\alpha\in A}\max_{1\le i\le m}(\rho g(u_*^0,\alpha)-l(s_i))\wp(d\alpha)=\max_{(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in U^m}\int_{\alpha\in A}\max_{1\le i\le m}(\rho g(u_*(s_i),\alpha)-l(s_i))\wp(d\alpha).$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема. При $\rho>0$ построенная стратегия (u_*^0,P^0) доставляет максимум линейной свертке $\rho R(u_*, P)-L(u_*, P)$.

Доказательство. Пусть (u_*, P) – произвольная стратегия. Из леммы 6 следует, что существует такая стратегия (u_*^1,P^1), что последовательность $\wp((P^1)^{-1}(s_1))$, $\wp((P^1)^{-1}(s_2)),\ldots$ не возрастает и

$$\rho R(u_*,P)-L(u_*,P)\le\rho R(u_*^1,P^1)-L(u_*^1,P^1).$$

В данном разделе показано, что для такой стратегии (u_*^1, P^1) найдется стратегия (u_*^2, P^2), для которой $(P^1)^{-1}(s_i) = \varnothing$ при $i > m$ и

$$\rho R(u_*^1, P^1) - L(u_*^1, P^1) \le \rho R(u_*^2, P^2) - L(u_*^2, P^2).$$

А для такой стратегии (u_*^2, P^2) выполняется неравенство

$$\rho R(u_*^2, P^2) - L(u_*^2, P^2) \le \rho R(u_*^0, P^0) - L(u_*^0, P^0).$$

Сравнивая эти неравенства, получим

$$\rho R(u_*, P) - L(u_*, P) \le \rho R(u_*^0, P^0) - L(u_*^0, P^0).$$

В силу произвольности стратегии (u_*, P) теорема доказана.

Построенная стратегия (u_*^0, P^0) финитна, что хорошо соответствует содержательным представлениям об оптимальности в рассматриваемой задаче.

6. Заключение

Полученные результаты свидетельствуют о том, что структура решений рассматриваемой задачи, которые могли бы считаться в том или ином смысле оптимальными, соответствует содержательным представлениям о том, каким может быть решение такой задачи. Это можно рассматривать как довод в пользу адекватности построенной модели.

Рассмотрение конкретных, возможно «игрушечных», примеров указывает на связь рассмотренной задачи со многими областями современной математики: с задачами о дележе торта [12, 13], с задачами об оптимальных упаковках шаров [14], с задачами комбинаторной оптимизации [15] и т.д. В данной статье собраны те результаты, которые удается получить относительно элементарными методами.

Возможны различные обобщения и уточнения рассмотренной задачи. Можно учитывать возможные ошибки при передаче информации. Можно рассматривать случаи, когда доступная оперирующей стороне информация не позволяет даже в принципе однозначно определить реализовавшееся значение неопределенного фактора. Наверняка есть и другие варианты.

Литература

1. *Колмогоров А.Н.* Три подхода к определению понятия «количество информации» // Проблемы передачи информации. 1965. – Т. 1., № 1. – С. 3–11.
2. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – 829 с.
3. *Ермольев Ю.М.* Методы стохастического программирования. – М.: Наука, 1976. – 240 с.
4. *Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczynski A.* Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. – 436 p.
5. *Яглом А.М., Яглом И.М.* Вероятность и информация. – М.: Наука, 1973. – 512 с.
6. *Чуднов А.М.* Алгоритмы классификации и идентификации ситуаций на основе взвешивания // Дискрет. матем. – 2014. – Т. 26, Вып. 4. – С. 119–134.
7. *Khovanova T.* Parallel Weighings. https://arxiv.org/abs/1310.7268v1. (дата обращения 21.04.2025).
8. *Guy R.K., Nowakowski R. J.* Coin-Weighing Problems // The American Mathematical Monthly. – 1995. – Vol. 102, № 2. – P. 164–167.
9. *Berge C.* Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques. – Paris: Dunod, 1959. – 272 p.
10. *Харди Г.Г., Литлвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: КомКнига, 2006. – 456 с.
11. *Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2011. – 1296 с.
12. *Половинкин Е.С.* О некоторых свойствах векторных мер // Тр. ИММ УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 1. – С. 175–188.
13. *Barbanel J.B.* The Geometry of Efficient Fair Division. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 462 p.
14. *Конвей Дж., Слоэн Н.* Упаковки шаров, решетки и группы: В 2-х т. Т. I. – М.: Мир, 1990. – 415 с. Т. II. М.: Мир, 1990. – 376 с.
15. *Schrijver A.* Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. – 1881 p.