

# РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЛАГИ В РАСТИТЕЛЬНОМ ПОКРОВЕ

Воротынцев А.В.

ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

avv\_alexv@mail.ru

*Аннотация.* Работа направлена на формирование основ математического моделирования процессов переноса тепла и влаги фитоценоза, а также процессов роста и развития биомасс растения. Исследуется краевая задача определения дефицита влажности межлиственного воздуха в зависимости от водного и радиационного режимов окружающей среды.

*Ключевые слова:* транспирация, устьичное регулирование, растительный покров, фитоценоз.

## Введение

В работе исследуется и формулируется система математических уравнений, описывающая нелинейные процессы переноса и испарения влаги в растительном покрове под действием поглощенной листьями радиации, скорости турбулентного обмена, а также дефицита влажности воздуха среды, окружающей растение. В качестве параметра разложения краевой задачи используется коэффициент проводимости устьиц листа. Предполагается, что такой параметр становится малым при дефиците почвенной влаги.

## 1. Краевая задача для функции дефицита влажности воздуха

В [1] получено уравнение для функции  $y(x) = d_a(x, t)$  дефицита влажности межлиственного воздуха на высоте  $x$ ,  $H_l^- \leq x \leq H_l$ , где  $H_l^-$  – нижняя, а  $H_l$  – верхняя границы испаряющих воду листьев растительного покрова:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right\} - D_l'' \{ y(x) - g(x) \} S_l p_l(x) = 0, H_l^- \leq x \leq H_l; \quad (1)$$

с краевыми условиями:

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) + D_a' \{ y(H_l) - d_a(H_a) \} = 0, x = H_l; \quad (2)$$

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) - D_{as}' \{ y(H_l^-) - d_a(0) \} = 0, x = H_l^-; \quad (3)$$

где

$$g(x) = \chi^{-1} \left\{ \frac{G}{D_l'} - \frac{1}{D_T'} \right\} R_{lx}''(x). \quad (4)$$

Здесь  $d_a(H_a)$ ,  $d_a(0)$  – заданные значения дефицита влажности межлиственного воздуха в нижней,  $x = 0$ , и верхней,  $x = H_a$ , точках измерения;  $R_{lx}''(x)$  – коэффициент, определяющий величину радиации  $\Delta R_{lx} = R_{lx}'' S_l p_l \Delta x$ , поглощенной слоем  $(x, x + \Delta x)$ ;  $k(x)$  – коэффициент турбулентного обмен;  $D_l'' = \left\{ \frac{1}{D_q} + \frac{\delta \rho \chi}{c_p \rho_a D_T} \right\}^{-1}$ , где  $D_q$  – коэффициент проводимости устьиц;  $D_T$  – коэффициент теплообмена лист-воздух;  $S_l$  – площадь листьев, растущих на единице площади почвы;  $p_l(x)$  – плотность распределения листовой поверхности на высоте  $x$ ;  $D_a'$ ,  $D_{as}'$ ,  $\tilde{D}_s'$ ,  $\chi$ ,  $G$ ,  $D_T' = \frac{c_p \rho_a}{\delta \rho \chi} D_T$  – константы.

Воспользуемся следующим преобразованием

$$z(x) = D_{al}' \left\{ \int_0^x \frac{d\xi}{k(\xi)} - \frac{1}{D_{as}'} \right\}, \text{ где} \quad (5)$$

$$\frac{1}{D_{as}'} = \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k(x)}, \frac{1}{D_{al}'} = \int_{H_l^-}^{H_l} \frac{dx}{k(x)}, \frac{1}{D_a'} = \int_{H_l}^{H_a} \frac{dx}{k(x)}.$$

В силу положительности  $k(x) > 0$  преобразование  $z(x)$  является монотонно возрастающей функцией. Поэтому функция  $z(x)$  имеет обратную  $x(z)$ . Функция  $z(x)$  взаимно однозначно преобразует отрезок  $H_l^- \leq x \leq H_l$  в отрезок  $0 \leq z \leq 1$ .

### 1.1. Приведенная краевая задача для функции дефицита влажности

Преобразование (5) переменной  $x$  в переменную  $z(x)$  приводит краевую задачу (1) – (4) к следующей краевой задаче (6) – (8) относительно неизвестной функции  $Y(z, v) = d_a(x(z))$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y - v\{Y - \tilde{g}(z, v)\}S_l \tilde{p}_l(z) = 0, 0 \leq z \leq 1; \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y - a_1\{Y - b_1\} = 0, z = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y + a_2\{Y - b_2\} = 0, z = 1. \quad (8)$$

где

$$v = \frac{D_l''}{D_{al}'}, \tilde{p}_l(z) = \frac{k(x)}{D_{al}'} p_l(x), \quad (9)$$

$$a_1 = \frac{D_{al}'}{D_{al}'}, a_2 = \frac{D_{al}'}{D_{al}'}, b_1 = d_a(0), b_2 = d_a(H_a);$$

$$\tilde{g}(z, v) = g(x(z)) = \chi^{-1} \left\{ \frac{G}{vD_{al}'} - \frac{1}{D_T''} \right\} \tilde{R}_{lx}''(z);$$

$$\tilde{R}_{lx}''(z) = R_{lx}''(x(z));$$

$$\bar{g}(z, v) = \chi^{-1} \left\{ \frac{G}{vD_{al}'} - \frac{1}{D_T''} \right\} \bar{R}_{lx};$$

$a_i, b_i$  – константы.

Доказательство.

Пусть функция  $Y(z)$  удовлетворяет тождеству  $Y(z(x)) \equiv y(x)$ , где  $y(x)$  – некоторая дважды дифференцируемая функция. Покажем, что

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) = D_{al}' \frac{\partial}{\partial z} Y(z), \quad (10)$$

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right\} = D_{al}' D_{al}' \frac{\partial^2}{\partial z^2} Y(z), \text{ или}$$

$$\partial x / k = \partial z / D_{al}'.$$

В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x} y(x) = \frac{\partial}{\partial x} Y(z(x)) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} Y = \frac{D_{al}'}{k(x)} \frac{\partial}{\partial z} Y, \text{ или}$$

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) = D_{al}' \frac{\partial}{\partial z} Y(z);$$

Дифференцируя последнее еще раз, получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D_{al}' \frac{\partial}{\partial z} Y(z) \right\} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ D_{al}' \frac{\partial}{\partial z} Y(z) \right\} = \frac{D_{al}'}{k(x)} D_{al}' \frac{\partial^2}{\partial z^2} Y(z), \text{ или}$$

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right\} = D_{al}' D_{al}' \frac{\partial^2}{\partial z^2} Y(z).$$

Умножим уравнение (1) на  $k(x)$  и воспользуемся вторым тождеством из (10):

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y(x) \right\} - D_l'' \{y(x) - g(x)\} S_l k(x) p_l(x) = 0, H_l^- \leq x \leq H_l;$$

$$D_{al}' D_{al}' \frac{\partial^2}{\partial z^2} Y(z) - D_l'' \{y(x) - g(x)\} S_l k(x) p_l(x) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y(z) - \frac{D_l''}{D_{al}'} \{y(x) - g(x)\} S_l \frac{k(x)}{D_{al}'} p_l(x) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y(z) - v \{y(x) - g(x)\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y(z) - v \{Y(z) - \tilde{g}(z, v)\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \text{ или}$$

Уравнение (6) приведенной краевой задачи доказано. Далее, в краевых условиях, согласно первому тождеству из (10) заменим  $k(x) \partial y / \partial x$  :

$$D'_{al} \frac{\partial}{\partial z} Y(z) + D'_a \{y(H_l) - d_a(H_a)\} = 0, x = H_l, \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y(z) + a_2 \{Y(z) - b_2\} = 0, z = 1.$$

Аналогично, получим условие (7) с помощью (10) из

$$D'_{al} \frac{\partial}{\partial z} Y(z) - D'_{as} \{y(x) - d_a(0)\} = 0, x = H_l^-, \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y - a_1 \{Y - b_1\} = 0, z = 0.$$

Функция  $\tilde{p}_l(z)$  является плотностью распределения листовой поверхности на высоте  $z$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , так как

$$\int_0^1 \tilde{p}_l(z) dz = \int_0^1 p_l(x) \frac{k(x)}{D'_{al}} dz = \int_{H_l^-}^{H_l} p_l(x) dx = 1.$$

## 1.2. Приведенное уравнение для производной функции дефицита

Подставляя  $D''_l = v D'_{al}$  в задачу (1) – (4), дифференцируя и полагая  $y_v = \partial d_a(x, v) / \partial v$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y_v \right\} - \{v \{y_v - g_v(x, v)\} + \{y - g(x, v)\}\} D'_{al} S_l p_l(x) = 0, H_l^- \leq x \leq H_l; \quad (11)$$

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} y_v(x) + D'_a \{y_v(H_l) - 0\} = 0, x = H_l; \quad (12)$$

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} y_v(x) - D'_{as} \{y_v(H_l^-) - 0\} = 0, x = H_l^-; \quad (13)$$

$$v = \frac{D''_l}{D'_{al}}, g(x, v) = \chi^{-1} \left\{ v^{-1} \frac{G}{D'_{al}} - \frac{1}{D'_T} \right\} R''_{lx}(x). \quad (14)$$

Преобразование  $z(x)$ ,  $\partial z / D'_{al} = \partial x / k$ , приводит уравнение (11) и краевые условия (12) – (13) к следующей краевой задаче относительно функции  $Y_v = \partial d_a(x(z), v) / \partial v$  – производной функции дефицита:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y_v - \left\{ v Y_v + Y - \frac{\partial}{\partial v} \{v \tilde{g}(z, v)\} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, 0 \leq z \leq 1; \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y_v + a_2 Y_v = 0, z = 1, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y_v - a_1 Y_v = 0, z = 0, \text{ где} \quad (17)$$

$Y(z, v) = d_a(x(z), v)$  – решение задачи (1) – (4),

$$\frac{\partial}{\partial v} \{v \tilde{g}(z, v)\} = -\frac{1}{\chi D'_T} \tilde{R}''_{lx}(z), \tilde{g}(z, v) = \chi^{-1} \left\{ \frac{G}{v D'_{al}} - \frac{1}{D'_T} \right\} R''_{lx}(x(z)),$$

$$a_1 = \frac{D'_{as}}{D'_{al}}, a_2 = \frac{D'_a}{D'_{al}}.$$

Доказательство.

Дифференцируя по параметру  $v$  уравнение (1) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y_v \right\} - \{v \{y_v - g_v(x, v)\} + \{y - g(x, v)\}\} D'_{al} S_l p_l(x) = 0, H_l^- \leq x \leq H_l;$$

что, используя тождества (10)

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x) \frac{\partial}{\partial x} y_v \right\} = D'_{al} D'_{al} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Y_v,$$

приводит к искомому уравнению:

$$D'_{al} D'_{al} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Y_v - k(x) \{v \{Y_v - g_v(x, v)\} + \{Y - g(x, v)\}\} D'_{al} S_l p_l(x) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y_v - \left\{ vY_v + \left\{ Y - \frac{\partial}{\partial v} \{ v g(x, v) \} \right\} \right\} S_l \frac{k(x)}{D_{al}'} p_l(x) = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y_v - \left\{ vY_v + \left\{ Y - \frac{\partial}{\partial v} \{ v \tilde{g}(z, v) \} \right\} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \text{ где}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \{ v \tilde{g}(z, v) \} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v \chi^{-1} \left\{ \frac{G}{v D_{al}'} - \frac{1}{D_T''} \right\} R''_{llx}(x(z)) \right\} = -\frac{1}{\chi D_T''} \tilde{R}''_{llx}(z).$$

## 2. Представление краевой задачи определения функции дефицита влажности семейством краевых задач

Представим решение  $Y(z, v, t)$  задачи (6) – (9) в виде суммы

$$Y = Y_0(z) + v \tilde{Y}_1(z, v), \quad (18)$$

где  $Y_0(z)$ ,  $\tilde{Y}_1(z, v)$  – решения двух следующих краевых задач.

Краевая задача для  $Y_0(z)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y_0 + g_0(z) S_l \tilde{p}_l(z) = 0, 0 \leq z \leq 1; \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y_0 - a_1 \{ Y_0 - b_1 \} = 0, z = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial z} Y_0 + a_2 \{ Y_0 - b_2 \} = 0, z = 1.$$

Краевая задача для  $\tilde{Y}_1(z, v)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{Y}_1 - \left\{ v \tilde{Y}_1 + Y_0(z) - \frac{\partial}{\partial v} \{ v \tilde{g}(z, v) \} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, 0 \leq z \leq 1; \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{Y}_1 - a_1 \{ \tilde{Y}_1 - 0 \} = 0, z = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{Y}_1 + a_2 \{ \tilde{Y}_1 - 0 \} = 0, z = 1.$$

Здесь

$$g_0(z) = \chi^{-1} \frac{G}{D_{al}'} \tilde{R}''_{llx}(z), \frac{\partial}{\partial v} \{ v \tilde{g}(z, v) \} = -\chi^{-1} \frac{1}{D_T''} \tilde{R}''_{llx}(z), \quad (22)$$

$$v \tilde{g}(z, v) = g_0(z) + v \frac{\partial}{\partial v} \{ v \tilde{g}(z, v) \} \rightarrow g_0(z), \text{ при } v \rightarrow 0.$$

Примечание. Параметр  $v = D_l''/D_{al}'$  является параметром разложения краевой задачи (6) – (9) и представления решения  $Y(z, v)$  этой задачи в виде  $Y(z, v) = Y_0(z) + v \tilde{Y}_1(z, v)$ , где  $Y_0(z)$  – решение задачи (10), а  $\tilde{Y}_1(z, v)$  – решение задачи (20). Очевидно, разложение можно продолжить до любой степени  $v^k$ . Из определения видно, что параметр разложения  $v$  пропорционален коэффициенту проводимости  $D_l'' = \left\{ \frac{1}{D_q(\psi_l)} + \frac{1}{D_T''} \right\}^{-1}$ , который через коэффициент  $D_q(\psi_l)$  проводимости устьичных щелей на поверхности листа зависит от водного потенциала листа  $\psi_l$ . Значения  $D_l''$  и  $v$  стремятся к 0 при росте дефицита влаги в почве и растении, [1–3].

Доказательство. Умножим уравнение (20) на  $v$  и сложим с уравнением (19):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y_0 - \{ -g_0(z) \} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, 0 \leq z \leq 1;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v \tilde{Y}_1 - \left\{ v^2 \tilde{Y}_1 + v Y_0(z) - v \frac{\partial}{\partial v} \{ v \tilde{g}(z, v) \} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, 0 \leq z \leq 1;$$

в сумме получим уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ Y_0 + v \tilde{Y}_1 \} - \left\{ v \{ v \tilde{Y}_1 + Y_0 \} - \left\{ g_0 + v \frac{\partial}{\partial v} \{ v \tilde{g}(z, v) \} \right\} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0,$$

которое совпадает с искомым уравнением:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Y - \{vY - v\tilde{g}(z, v)\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0,$$

так как, очевидно,

$$v\tilde{g}(z, v) = g_0(z) + v \frac{\partial}{\partial v} \{v\tilde{g}(z, v)\}.$$

2.1. Представление задачи для производной функции дефицита влажности семейством краевых задач

Представим решение  $Y_v(z, v) = \partial d_a(x(z), v)/\partial v$  краевой задачи (15) – (17) в виде

$$Y_v(z, v) = U_0(z) + v\tilde{U}_1(z, v), \quad (23)$$

где  $U_0(z)$ ,  $\tilde{U}_1(z, v)$  – решения двух следующих краевых задач.

Краевая задача для  $U_0(z)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_0 - \left\{ Y_0(z) - \frac{\partial}{\partial v} \{v\tilde{g}(z, v)\} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1; \quad (24)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U_0 - a_1 U_0 = 0, \quad z = 0; \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} U_0 + a_2 U_0 = 0, \quad z = 1.$$

Краевая задача для  $\tilde{U}_1(z, v)$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{U}_1 - \{v\tilde{U}_1 + U_0(z) + \tilde{Y}_1(z, v)\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1 \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{U}_1 - a_1 \tilde{U}_1 = 0, \quad z = 0; \quad (27)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{U}_1 + a_2 \tilde{U}_1 = 0, \quad z = 1.$$

Здесь

$Y_0(z)$  – решение краевой задачи  $Y_0$ ,

$$\frac{\partial}{\partial v} \{v\tilde{g}(z, v)\} = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v\chi^{-1} \left\{ \frac{G}{vD'_{al}} - \frac{1}{D''_r} \right\} \tilde{R}''_{lix}(z) \right\} = -\frac{1}{\chi D''_r} \tilde{R}''_{lix}(z).$$

Доказательство. Умножим уравнение (26) на  $v$ , сложим с уравнением (24):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_0 - \left\{ Y_0(z) - \frac{\partial}{\partial v} \{v\tilde{g}(z, v)\} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} v\tilde{U}_1 - \{v\{v\tilde{U}_1 + U_0\} + v\tilde{Y}_1(z, v)\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1;$$

и получим уравнение (15):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \{U_0 + v\tilde{U}_1\} - \left\{ v\{v\tilde{U}_1 + U_0\} + Y_0 + v\tilde{Y}_1 - \frac{\partial}{\partial v} \{v\tilde{g}(z, v)\} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0, \text{ или}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \{Y_v\} - \left\{ vY_v + Y - \frac{\partial}{\partial v} \{v\tilde{g}(z, v)\} \right\} S_l \tilde{p}_l(z) = 0.$$

Такую же операцию сделаем с однородными краевыми условиями.

### 3. Заключение

Краевые задачи определения функции дефицита влажности межлиственного воздуха и производной этой функции представлены семейством сравнительно простых краевых задач с помощью разложения по малому параметру – коэффициенту проводимости устьиц, осуществляющих влагообмен и газообмен растений с окружающей средой. Это позволяет для малых значений параметра в условиях дефицита почвенной влаги находить асимптотические разложения названных функций и других основных характеристик растительного покрова, например, характеристик, необходимых для оценивания соответствующих моделей.

## Литература

1. *Воротынецов А.В.* Исследование модели переноса тепла и влаги в растительном покрове с учетом баланса энергии // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2025): труды 18-й межд. конф. – М.: ИПУ РАН, 2025. – С. 355–361.
2. *Полуэктов Р.А., Смоляр Э.И., Терлеев В.В., Топаж А.Г.* Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. – СПб.: Изд-во СПбУ, 2006. – 396 с.
3. *Воротынецов А.В.* Приближенная модель переноса тепла и влаги в системе почва–растение с учетом баланса энергии // Вестник БГУ. Математика, Информатика. – 2014. – Вып. 9, № 1. – С. 22–26.