ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И ВЛАГИ В РАСТИТЕЛЬНОМ ПОКРОВЕ С УЧЕТОМ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ

Воротынцев А.В.
ФИЦ «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
avv_alexv@mail.ru

Аннотация. Формулируется краевая задача определения дефицита влажности воздуха в зависимости от радиационного, водного, теплового состояния растительного покрова фитоценоза. Дефицит влажности воздуха вместе с краевыми условиями, водным потенциалом растений определяет основные физические характеристики покрова: температуру, потоки тепла, влаги, транспирацию и т.д.

Ключевые слова: транспирация, устьичная регуляция, растительный покров, фитоценоз.

Введение

Процессы переноса водным раствором питательных веществ, их трансформации в системе почва-растения составляют физико-химическую основу жизнедеятельности растений и почвенных микроорганизмов, их роста и развития, а также адаптации к случайно меняющимся условиям среды. В настоящей работе исследуется и формулируется система математических уравнений, описывающая нелинейные процессы переноса и испарения влаги листьями растений под действием поглощенной листьями радиации, скорости турбулентного обмена, а также дефицита влажности воздуха окружающей растения среде. В сокращенном виде приводятся вычисления, необходимые для понимания результатов и их развития в последующих работах.

1. Модель переноса тепла и влаги в растительном покрове (РП)

В слое $0 \leq x \leq H_l$ растительного покрова фитоценоза и корнеобитаемом слое почвы $-H_s \leq x \leq 0$ рассмотрим, четыре связанные системы уравнений: 2 системы уравнений (1)–(4) для температуры воздуха T_s, листьев T_l, концентрации водяного пара в межлистном воздухе q_a, в устьичных полостях листьев q_l:

$$J_{Ta} = -c_p \rho_a k_a \, \partial T_a / \partial x, J_{qa} = -k_a \, \partial q_a / \partial x; \tag{1}$$

$$c_p \rho_a \, \partial T_a / \partial t = - \partial J_{Ta} / \partial x + f_{Tl}, \, \partial q_a / \partial t = -\partial J_{qa} / \partial x + f_{ql}; \tag{2}$$

$$f_{Tl} = c_p \rho_a D_T S_l (T_l - T_a) p_l, \, f_{ql} = D_q S_l (q_l - q_a) p_l; \tag{3}$$

$$f_{Tl} + \chi f_{ql} = R''_{llx} S_l p_l; \tag{4}$$

и 2 системы (5)–(7) для температуры поверхности T_s и водного потенциала $\psi_s < 0$, почвы $-H_s \leq x \leq 0$:

$$J_{Ts} = -c_p k_{Ts} \, \partial T_s / \partial x, J_{\psi s} = -k_{\psi s} \, \partial \psi_s / \partial x; \tag{5}$$

$$c_s \, \partial T_s / \partial t = - \partial J_{Ts} / \partial x, \, c_\psi \, \partial \psi_s / \partial t = - \partial J_{\psi s} / \partial \, x - f_{\psi s}; \tag{6}$$

$$f_{\psi s} = J_{ql} p_r + D_r S_r \big(\psi_s - \overline{\psi}_s\big) p_r; \tag{7}$$

с краевыми условиями (8)–(11):

$$T_a = T_a^0(t), q_a = q_a^0(t), x = H_a; \tag{8}$$

$$J_{Ta} = c_p \rho_a D_{Ts} (T_s - T_a), J_{qa} = D_{qs} (q_s - q_a), x = 0; \tag{9}$$

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} - J_{Ts} = R(0,t), -J_{\psi s} + J_{qa} = Q(t), x = 0; \tag{10}$$

$$T_s = T_s^0(t), \psi_s = \psi_s^0(t), x = -H_s; \tag{11}$$

Здесь $J_{Ta} = J_{Ta}(x.t)$, $J_{qa} = J_{qa}(x,t)$ – потоки тепла и водяного пара в воздухе, $J_{Ts}(x,t)$, $J_{\psi s}(x,t)$ – потоки тепла и воды в почве; $\overline{\psi}_s$(t) – усредненный водный потенциал корнеобитаемого слоя почвы; $\psi_l(t)$ – водный потенциал листьев, $R_{ll} = R_{ll}(x,t)$ – заданная поглощенная слоем (H_l^-, x) радиация, $R_l = R_l(t) = R_{ll}(H_l, t)$ – радиация, поглощенная покровом, $R(0,t)$ – радиационный баланс у поверхности почвы; $R_s(t) = R(0,t) + J_{Ts}(0,t)$ – энергия, поглощенная верхним слоем почвы; $S_l = S_l(t)$, $S_r = S_r(t)$ – поверхности листьев и корней, растущих на единице поверхности почвы; $S_l p_l(x,t)$,

$S_r p_r(x,t)$, – плотность листовой и всасывающей воду корневой поверхности; $D_q = D_q(\psi_l)$ – коэффициент проводимости для пара на границе лист воздух, зависящий от $\psi_l(t)$, $T_a^0(t)$, $q_a^0(t)$, $Q(t)$ и $T_s^0(t)$, $\psi_s^0(t)$, – заданные функции времени, измеряемые на высоте H_a над покровом и глубине $-H_s$ почвы. Остальное – заданные константы и функции; $\rho(T)$ – насыщенная влажность воздуха при температуре T; c_p, c_s, – теплоемкость воздуха и почвы; $k_a = k_a(x)$, k_{Ts} – теплопроводность воздуха и почвы; $k_{\psi s}$ – влагопроводность почвы, χ – теплота парообразования, D_T, D_k, D_a, D_{Ts}, D_{qs} – коэффициенты проводимости, [1–4].

1.1. Дополнительные обозначения

Дополнительно к общим обозначениям введем следующие обозначения

$$d_a(x,t) = \rho\big(T_a(x,t)\big) - q_a(x,t),\ d_s(x,t) = \rho\big(T_s(x,t)\big) - q_s(x,t); \tag{12}$$

$$d_a^0 = \rho(T_a^0) - q_a^0,\ d_a^0 = d_a(H_a,t),\ T_a^0 = T_a(H_a,t),\ q_a^0 = q_a(H_a,t);$$

$$d_s^0 = \rho(T_s^0) - q_s^0,\ d_s^0 = d_s(0,t),\ T_s^0 = T_s(0,t),\ q_s^0 = q_s(0,t);$$

$$\rho(T_2) = \rho(T_1) + \delta_\rho\{T_2 - T_1\},\ \delta_\rho(T) = \frac{\partial}{\partial T}\rho(T);$$

$$k(x) = \left\{1 + \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a}\right\}^{-1} k_a(x),\ G = \left\{1 + \frac{c_p \rho_a}{\delta_\rho \chi}\right\}^{-1};$$

$$\frac{1}{D_{as}} = \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k_a(x)},\ \frac{1}{D'_{as}} = \left\{1 + \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a}\right\} \frac{1}{D_{as}} = \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k(x)};$$

$$\frac{1}{D_{al}} = \int_{H_l^-}^{H_l} \frac{dx}{k_a(x)},\ \frac{1}{D'_{al}} = \left\{1 + \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a}\right\} \frac{1}{D_{al}} = \int_{H_l^-}^{H_l} \frac{dx}{k(x)};$$

$$\frac{1}{D_a} := \int_{H_l}^{H_a} \frac{dx}{k_a(x)},\ \frac{1}{D'_a} = \left\{1 + \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a}\right\} \frac{1}{D_a} = \int_{H_l}^{H_a} \frac{dx}{k(x)};$$

$$\frac{1}{D'_a} = \frac{1}{D_a} + \frac{1}{D'_{Ta}},\ \frac{1}{D'_{Ta}} = \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a D_a};$$

$$\frac{1}{D_{ak}} = \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k_a(x)},\ \frac{1}{D'_{Hk}} = \left\{1 + \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a}\right\} \frac{1}{D_{ak}} = \int_0^{H_l} \frac{d\xi}{k(\xi)};$$

$$\frac{1}{D'_{Hk}} = \frac{1}{D_{ak}} + \frac{1}{D'_{ak}},\ \frac{1}{D'_{ak}} = \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a D_{ak}};$$

$$\frac{1}{D'_{aH}} = \frac{1}{D'_a} + \frac{1}{D'_{al}} + \frac{1}{D'_{as}} = \int_0^{H_a} \frac{dx}{k(x)};$$

$$G_l = (1 - b_l)G,\ \hat{G}_s := \{1 - \hat{b}_s\}G,\ G_s = (1 - b_s)G;$$

$$\frac{1}{\hat{D}_{Ts}} = \frac{1}{D_{Ts}} + \frac{1}{D_{as}},\ \frac{1}{\hat{D}_{qs}} = \frac{1}{D_{qs}} + \frac{1}{D_{as}};$$

$$\frac{1}{D''_T} = \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a D_T},\ \frac{1}{D''_l} = \frac{1}{D_q} + \frac{1}{D''_T},\ \frac{1}{D'_l} = \frac{1}{D''_l S_l},\ \frac{1}{D'_q} = \frac{1}{D_q S_l},$$

$$\frac{1}{D'_T} = \frac{1}{D''_T}\frac{1}{S_l} = \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a D_T S_l};$$

$$\frac{1}{D'_{Ts}} = \frac{\chi \delta_\rho}{c_p \rho_a D_{Ts}},\ \frac{1}{\hat{D}'_s} = \frac{1}{\hat{D}_{qs}} + \frac{1}{\hat{D}'_{Ts}},\ \frac{1}{\hat{D}'_{Ts}} = \frac{\chi \delta_\rho}{c_p \rho_a \hat{D}_{Ts}},\ \frac{1}{D'_s} = \frac{1}{D_{qs}} + \frac{1}{D'_{Ts}};$$

$$b_l = G^{-1}\frac{D'_l}{D'_T},\ \hat{b}_s = G^{-1}\frac{\hat{D}'_s}{\hat{D}'_{Ts}},\ b_s = G^{-1}\frac{D'_s}{D'_{Ts}},$$

$$D'_\Sigma = D'_a + D'_l + D'_s\,.\ \overline{D}_\Sigma = D'_a + D'_T + D'_s;$$

Отметим, что введенные величины положительны, кроме, возможно, G_l и G_s. Очевидно, $D'_l/D'_T < 1$, D'_s/D'_{Ts}<1 .

1.2. Квазистационарная система

Пусть

$$\partial T_a/\partial t = 0,\ \partial q_a/\partial t = 0, \text{ а также}$$

$$p_l(x,t) = 0,\ при\ x \in [0, H_l^-] \cup [H_l, H_a].$$

Тогда

$$J_{Ta} = -c_p \rho_a k_a \frac{\partial}{\partial x} T_a,\ J_{qa} = -k_a \frac{\partial}{\partial x} q_a,\ 0 < x \le H_a; \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J_{Ta} = c_p \rho_a D_T S_l \{T_l - T_a\} p_l,\ \frac{\partial}{\partial x} J_{qa} = D_q S_l \{q_l - q_a\} p_l,\ 0 < x \le H_a; \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{J_{Ta} + \chi J_{qa}\} = R''_{llx} S_l p_l,\ 0 < x \le H_a, \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J_{Ta} = 0,\ \frac{\partial}{\partial x} J_{qa} = 0,\ x \in [0, H_l^-] \cup [H_l, H_a]. \tag{16}$$

$$T_a = T_a^0(t),\ q_a = q_a^0(t),\ x = H_a; \tag{17}$$

$$J_{Ta} = c_p \rho_a D_a \{T_a - T_a^0\},\ J_{qa} = D_a \{q_a - q_a^0\},\ x = H_l, \tag{18}$$

$$J_{Ta} = c_p \rho_a \widehat{D}_{Ts} \{T_s - T_a\},\ J_{qa} = \widehat{D}_{qs} \{q_s - q_a\},\ x = H_l^-; \tag{19}$$

$$J_{Ta} + \chi J_{qa} = R_s,\ x = 0. \tag{20}$$

Комментарий. Некоторые результаты из (13)–(20) используются в [5–7].

Доказательство. В самом деле, при $x \in [0, H_l^-] \cup [H_l, H_a]$ плотность испаряющих воду листьев $p_l(x,t) = 0$, и поэтому потоки J_{Ta} и J_{qa} в (13)–(16) не зависят от x, т.е. (16) верно. Из (1) следует

$$\int_{H_l}^{H_a} \frac{J_{Ta}(t)}{c_p k_a(x)} dx = T_a(H_l,t) - T_a^0(t) \text{ или } J_{Ta} = c_p \rho_a D_a \{T_a(H_l,t) - T_a^0(t)\},$$

$$\int_{H_l}^{H_a} \frac{J_{qa}(t)}{k_a(x)} dx = q_a(H_l,t) - q_a^0(t) \text{ или } J_{qa} = D_a \{q_a(H_l,t) - q_a^0(t)\},$$

где обозначено

$$\frac{1}{D_a} = \int_{H_l}^{H_a} \frac{dx}{k_a(x)}.$$

Аналогично, при $x \in [0, H_l^-]$ плотность $p_l(x,t) = 0$ и поэтому потоки J_{Ta} и J_{qa} не зависят от x. Из (1) следует

$$\int_0^{H_l^-} \frac{J_{Ta}(t)}{c_p \rho_a k_a(x)} dx = T_a(0,t) - T_a(H_l^-,t),\ \frac{J_{Ta}(t)}{c_p \rho_a D_{Ts}} = T_s(0,t) - T_a(0,t) \text{ или}$$

складывая, получим

$$\frac{J_{Ta}(t)}{c_p \rho_a \widehat{D}_{Ts}} = \{T_s(0,t) - T_a(H_l^-,t)\}, \text{ где } \frac{1}{\widehat{D}_{Ts}} = \frac{1}{D_{Ts}} + \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k_a(x)}.$$

Аналогично, из (1) следует

$$\int_0^{H_l^-} \frac{J_{qa}(t)}{k_a(x)} dx = q_a(0,t) - q_a(H_l^-,t),\ \frac{J_{qa}(t)}{D_{qs}} = q_s(0,t) - q_a(0,t).$$

складывая оба выражения, получим

$$\frac{J_{qa}(t)}{\widehat{D}_{qs}} = \{q_s(0,t) - q_a(H_l^-,t)\}, \text{ где } \frac{1}{\widehat{D}_{qs}} = \frac{1}{D_{qs}} + \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k_a(x)}.$$

2. Уравнение для дефицита влажности

Функция $y = d_a(x,t)$ дефицита влажности межлистного воздуха в квазистационарном приближении удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k(x)\frac{\partial}{\partial x} y\right\} - D''_l \{y - g(x)\} S_l p_l(x) = 0,\ H_l^- \le x \le H_l; \tag{21}$$

$$k(x)\frac{\partial}{\partial x} y(x) + D'_a \{y(H_l) - d_a(H_a)\} = 0,\ H_l \le x < H_a; \tag{22}$$

$$k(x)\frac{\partial}{\partial x} y(x) - D'_{as} \{y(H_l^-) - d_a(0)\} = 0,\ \ 0 < x \le H_l^-; \tag{23}$$

$$k(x)\frac{\partial}{\partial x}y(x)-\widehat{D}'_s\{y(H_l^-)-d_s(0)-g_s\}=0,\ 0<x\le H_l^-; \tag{24}$$

где

$$g(x)=\chi^{-1}\left\{\frac{G}{D_l''}-\frac{1}{D_T''}\right\}R_{llx}''(x),\ g_s=\chi^{-1}G\left\{\frac{1}{\widehat{D}_{qs}}-\frac{1}{\widehat{D}_{Ts}}\right\}R_s. \tag{25}$$

Кроме этого, справедливы выражения:

$$k_a(x)\frac{\partial}{\partial x}y(x)=J_{qa}(x)-\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}J_{Ta}(x)\ ;\ 0<x\le H_a; \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_a\frac{\partial}{\partial x}y\right\}=0,\ \text{при}\ x\in[0,H_l^-]\cup[H_l,H_a]; \tag{27}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa}=D_l''\left\{\frac{R_{llx}''}{\chi D_T''}+d_a\right\}S_lp_l,\ H_l^-\le x\le H_l; \tag{28}$$

Доказательство. Воспользуемся (13)–(16): Учитывая $\mathrm{q_a}=\rho(\mathrm{T_a})-\mathrm{d_a}$ из (13) получим:

$$J_{Ta}=-c_p\rho_ak_a\frac{\partial}{\partial x}T_a,J_{qa}=-k_a\frac{\partial}{\partial x}q_a,\ 0<x\le H_a;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}T_a(x)=-\frac{J_{Ta}(x)}{c_p\rho_ak_a(x)},\frac{\partial}{\partial x}q_a(x)=-\frac{J_{qa}(x)}{k_a(x)},$$

$$-\frac{J_{qa}}{k_a(x)}=\frac{\partial}{\partial x}q_a=\frac{\partial}{\partial x}\{\rho(T_a)-d_a\}=\delta_\rho\frac{\partial}{\partial x}T_a-\frac{\partial}{\partial x}d_a,$$

$$-\frac{J_{qa}}{k_a(x)}=\delta_\rho\frac{\partial}{\partial x}T_a-\frac{\partial}{\partial x}d_a=-\delta_\rho\frac{J_{Ta}}{c_p\rho_ak_a(x)}-\frac{\partial}{\partial x}d_a,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}d_a=\frac{J_{qa}}{k_a}-\delta_\rho\frac{J_{Ta}}{c_p\rho_ak_a}=\left\{J_{qa}-\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}J_{Ta}\right\}\frac{1}{k_a},$$

$$k_a\frac{\partial}{\partial x}d_a(x)=J_{qa}(x)-\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}J_{Ta}(x),\ 0<x\le H_a.$$

При $\mathrm{x}\in[0,\mathrm{H_l^-}]\cup[\mathrm{H_l},\mathrm{H_a}]$ плотность $p_l(x)=0$. Поэтому из (14) следует:

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{Ta}=0,\frac{\partial}{\partial x}J_{qa}=0,\ \text{отсюда}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_a\frac{\partial}{\partial x}y\right\}=\frac{\partial}{\partial x}J_{qa}-\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}\frac{\partial}{\partial x}J_{Ta}=0,\ x\in[0,H_l^-]\cup[H_l,H_a].$$

1) Учитывая, что $J_{qa}(x),J_{Ta}(x)$ постоянны при $\mathrm{x}\in[\mathrm{H_l},\mathrm{H_a}]$, проинтегрируем

$$\frac{\partial}{\partial x}y=\left\{J_{qa}(x)-\frac{\delta_\rho}{c_p}J_{Ta}(x)\right\}\frac{1}{k_a(x)},\ \text{для}\ x\in[H_l,H_a]:$$

$$\int_{H_l}^{H_a}\frac{\partial y}{\partial x}dx=y(H_a)-y(H_l)=\left\{J_{qa}-\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}J_{Ta}\right\}\int_{H_l}^{H_a}\frac{dx}{k_a(x)}.$$

Следовательно,

$$D_a\{d_a^0(t)-y(H_l)\}=J_{qa}(x)-\frac{\delta_\rho}{c_p}J_{Ta}(x)\ \text{или}$$

$$k_a(x)\frac{\partial}{\partial x}y=D_a\{d_a^0(t)-y(H_l)\}=J_{qa}(x)-\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}J_{Ta}(x),\ H_l\le x\le H_a,$$

Разделив на $1+\delta_\rho\chi/\{c_p\rho_a\}$, представим полученное граничное условие в виде

$$k(x)\frac{\partial}{\partial x}y+D_a'\{y(H_l)-d_a^0(t)\}=0,\ H_l\le x\le H_a,\ \text{где}$$

$$\frac{1}{D_a'}:=\left\{1+\frac{\delta_\rho\chi}{c_p\rho_a}\right\}\frac{1}{D_a}=\int_{H_l}^{H_a}\frac{dx}{k(x)}.$$

2) Покажем, что при $H_l^-\le x\le H_l$:

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{Ta}=c_p\rho_aD_T\{T_l-T_a\}S_lp_l=D_l''\left\{\frac{1}{D_q}R_{llx}''-\chi d_a\right\}S_lp_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = D_q\{q_l - q_a\}S_l p_l = D_l''\left\{\frac{R_{llx}''}{\chi D_T''} + d_a\right\}S_l p_l.$$

Из (14)–(15):

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{Ta} = c_p\rho_a D_T S_l\{T_l - T_a\}p_l, \frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = D_q S_l\{q_l - q_a\}p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{J_{Ta} + \chi J_{qa}\} = R_{llx}'' S_l p_l,$$

очевидно, следует

$$c_p\rho_a D_T S_l\{T_l - T_a\}p_l + \chi D_q S_l\{q_l - q_a\}p_l = R_{llx}'' S_l p_l \text{ или}$$

$$c_p\rho_a D_T\{T_l - T_a\} + \chi D_q\{q_l - q_a\} = R_{llx}'',$$

$$\{c_p\rho_a D_T + \delta_\rho\chi D_q\}\{T_l - T_a\} + \chi D_q d_a = R_{llx}'', \text{ так как}$$

$$q_l - q_a = \rho(T_l) - \rho(T_a) + d_a = \delta_\rho\{T_l - T_a\} + d_a.$$

Подставляя, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{Ta} = c_p\rho_a D_T S_l\{T_l - T_a\}p_l = c_p\rho_a D_T S_l p_l \frac{R_{llx}'' - \chi D_q d_a}{c_p\rho_a D_T + \delta_\rho\chi D_q} \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{Ta} = \frac{\frac{1}{D_q}R_{llx}'' - \chi d_a}{\frac{1}{D_q} + \frac{\delta_\rho\chi}{c_p\rho_a D_T}}S_l p_l = D_l''\left\{\frac{1}{D_q}R_{llx}'' - \chi d_a\right\}S_l p_l,$$

так как $\frac{1}{D_l''} = \frac{1}{D_q} + \frac{\delta_\rho\chi}{c_p\rho_a D_T}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = D_q S_l\{q_l - q_a\}p_l = \chi^{-1}\left\{R_{llx}'' - c_p\rho_a D_T\{T_l - T_a\}\right\}S_l p_l, \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = D_q S_l\{q_l - q_a\}p_l = \chi^{-1}\left\{R_{llx}'' - c_p\rho_a D_T\{T_l - T_a\}\right\}S_l p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = \chi^{-1}\left\{R_{llx}'' - c_p\rho_a D_T\frac{R_{llx}'' - \chi D_q d_a}{c_p\rho_a D_T + \delta_\rho\chi D_q}\right\}S_l p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = \chi^{-1}\delta_\rho\chi D_q\left\{R_{llx}'' + \frac{c_p\rho_a}{\delta_\rho}D_T d_a\right\}\{c_p\rho_a D_T + \delta_\rho\chi D_q\}^{-1}S_l p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = \chi^{-1}\delta_\rho\chi D_q\left\{\frac{R_{llx}''}{c_p\rho_a D_T} + \frac{1}{\delta_\rho}d_a\right\}\left\{1 + \frac{\delta_\rho\chi D_q}{c_p\rho_a D_T}\right\}^{-1}S_l p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = \chi^{-1}\left\{\frac{\delta_\rho\chi}{c_p\rho_a D_T}R_{llx}'' + \chi d_a\right\}\left\{\frac{1}{D_q} + \frac{\delta_\rho\chi}{c_p\rho_a D_T}\right\}^{-1}S_l p_l,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{qa} = D_q\{q_l - q_a\}S_l p_l = D_l''\left\{\frac{R_{llx}''}{\chi D_T''} + d_a\right\}S_l p_l.$$

Итак, 2) доказано.

3) Рассмотрим

$$k_a\frac{\partial}{\partial x}d_a = J_{qa}(x) - \frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}J_{Ta}(x), \text{ при } H_l^- \le x \le H_l:$$

$$\chi k_a(x)\frac{\partial}{\partial x}d_a(x) = \{J_{Ta} + \chi J_{qa}\} - \left\{1 + \chi\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}\right\}J_{Ta},$$

$$\chi\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_a\frac{\partial}{\partial x}d_a\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\{J_{Ta} + \chi J_{qa}\} - \left\{1 + \chi\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}\right\}\frac{\partial}{\partial x}J_{Ta},$$

$$\chi\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_a\frac{\partial}{\partial x}d_a\right\} = R_{llx}'' S_l p_l - \left\{1 + \chi\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}\right\}D_l''\left\{\frac{1}{D_q}R_{llx}'' - \chi d_a\right\}S_l p_l,$$

$$\chi\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_a\frac{\partial}{\partial x}d_a\right\} - \left\{1 + \chi\frac{\delta_\rho}{c_p\rho_a}\right\}D_l''\chi d_a S_l p_l - A_1 R_{llx}'' S_l p_l = 0, \text{ где}$$

$$A_1 = 1 - \left\{1 + \chi \frac{\delta_\rho}{c_p \rho_a}\right\} \frac{D_l''}{D_q} = 1 - \left\{1 + \chi \frac{\delta_\rho}{c_p \rho_a}\right\} \frac{1}{D_q / D_l''},$$

$$A_1 = \left\{1 + \frac{D_q}{D_T''} - 1 - \chi \frac{\delta_\rho}{c_p \rho_a}\right\} \left\{1 + \frac{D_q}{D_T''}\right\}^{-1} = \left\{\frac{\delta_\rho \chi D_q}{c_p \rho_a D_T} - \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a}\right\} \left\{1 + \frac{D_q}{D_T''}\right\}^{-1},$$

$$A_1 = -\frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a} \left\{1 - \frac{D_q}{D_T}\right\} \left\{1 + \frac{D_q}{D_T''}\right\}^{-1} = -\frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a} \left\{1 - \frac{D_q}{D_T}\right\} \frac{D_l''}{D_q},$$

$$A_1 = -\frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a} \left\{1 - \frac{D_q}{D_T}\right\} \frac{D_l''}{D_q} = -\frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a} D_l'' \left\{\frac{1}{D_q} - \frac{1}{D_T}\right\}.$$

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_a \frac{\partial}{\partial x} d_a\right\} - \left\{1 + \chi \frac{\delta_\rho}{c_p \rho_a}\right\} D_l'' d_a S_l p_l + \frac{\delta_\rho}{c_p \rho_a} D_l'' \left\{\frac{1}{D_q} - \frac{1}{D_T}\right\} R_{llx}'' S_l p_l = 0.$$

Разделив последнее на $\left\{1 + \frac{\chi \delta_\rho}{c_p \rho_a}\right\}$, получаем искомое уравнение для $d_a(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k(x) \frac{\partial}{\partial x} d_a\right\} - D_l'' d_a S_l p_l + \chi^{-1} D_l'' \left\{\frac{G}{D_l''} - \frac{1}{D_T''}\right\} R_{llx}'' S_l p_l = 0 \text{ или}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k(x) \frac{\partial}{\partial x} y\right\} - D_l'' S_l \{y - g(x)\} p_l(x) = 0,$$

где

$$g(x) = \chi^{-1} \left\{\frac{G}{D_l''} - \frac{1}{D_T''}\right\} R_{llx}''(x).$$

4) Для $x \in [0, H_l^-]$:

$$\int_0^{H_l^-} \frac{\partial d_a}{\partial x} dx = d_a(H_l^-) - d_a(0) = \left\{J_{qa} - \frac{\delta_\rho}{c_p \rho_a} J_{Ta}\right\} \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k_a(x)},$$

$$k_a(x) \frac{\partial}{\partial x} d_a(x) = D_{as}\{d_a(H_l^-) - d_a(0)\} = \left\{J_{qa}(x) - \frac{\delta_\rho}{c_p \rho_a} J_{Ta}(x)\right\}, \ 0 < x \le H_l^-,$$

где $\frac{1}{D_{as}} = \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k_a(x)}$.

Таким образом, граничное условие для $x = H_l^-$ можно представить в виде

$$k(x) \frac{\partial}{\partial x} d_a(x) - D_{as}'\{d_a(x) - d_a(0)\} = 0, x = H_l^-, \text{ где}$$

$$\frac{1}{D_{as}'} = \left\{1 + \frac{\chi \delta_\rho}{c_p \rho_a}\right\} \int_0^{H_l^-} \frac{dx}{k_a(x)} = \left\{1 + \frac{\delta_\rho \chi}{c_p \rho_a}\right\} \frac{1}{D_{as}}.$$

3. Заключение

Сформулировано и доказано представление профиля дефицита влажности межлистного воздуха дифференциальным уравнением с краевыми условиями третьего рода. Решение уравнения определяет основные физические характеристики растительного покрова: температуру воздуха и листьев, потоки тепла и влаги, балансы энергии и т.д.

Литература

1. *Полуэктов Р.А., Смоляр Э.И., Терлеев В.В., Топаж А.Г.* Модели продукционного процесса сельскохозяйственных культур. Изд-во С.-Петер. Ун-та, 2006. – 396 с.
2. *Бихеле З.Н., Молдау Х.А., Росс Ю.К.* Математическое моделирование транспирации и фотосинтеза растений при недостатке почвенной влаги. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. – 223 с.
3. *Воротынцев А.В*. Приближенная модель переноса тепла и влаги в системе почва-растение с учетом баланса энергии. // Вестник БГУ. Математика. Информатика. – 2014. – Вып. 9, № 1. – С. 22–26.
4. *Торнли Дж.Г.М.* Математические модели в физиологии растений. Пер. с англ. – Киев: Наук. думка, 1982. – 312 с.
5. *Воротынцев А.В.* К построению адаптивной модели растительного покрова // Евразийский Союз Ученых. Серия: технические и физико-математические науки. – 2021. – Том 1, № 10(91). – С. 47–53. DOI: 10.31618/ESU.2413-9335.2021.1.91.1474.

6. *Воротынцев А.В.* О моделировании распределения ассимилятов фотосинтеза растительного покрова // Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. – 2022. – № 3. – С. 55–58. DOI: 10.37882/2223-2966.2022.03.08.
7. *Vorotyntsev A.V.* Towards an Adaptive Plant Population Model // 17th International Conference on Management of Large-Scale System Development (MLSD'2024), (Moscow, Russian Federation, September 24–26, 2024). IEEE Conference Publications, IEEE Xplore Digital Library. [Published online], 2024. – P. 1–5. [Электронный ресурс]. – P. 1–5. DOI: 10.1109/MLSD61779.2024.10739513.