

ЗАКОНОМЕРНОСТИ РАЗВИТИЯ КОМПАНИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ. ДВА ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ВАРИАНТА АНАЛИЗА ДИНАМИКИ МЕДИАННЫХ ОЦЕНОК ВЫРУЧКИ

Полунин Ю.А.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
yplnn@yandex.ru

Аннотация. Доклад посвящен нелинейным методам анализа динамики выручки 23943 стабильных российских компаний с 2003 по 2022 годы. Анализ строится на базе регрессионных моделей, структура которых получена преобразованием нелинейного отображения, что позволяет интерпретировать коэффициенты регрессионных моделей в категориях нелинейной динамики.

Ключевые слова: нелинейное отображение, модель регрессионного анализа, динамика медианной выручки, статистическая значимость.

Введение

Представляемые материалы являются еще неопубликованной частью большого исследования стабильных российских компаний. В докладе рассматриваются новые результаты сравнения характеристик трех подгрупп компаний с разными закономерностями развития в посткризисное время, полученные с использованием моделей линейного регрессионного анализа, связанных с нелинейными отображениями.

Как правило, анализ развития компаний, проводимый по эмпирическим данным, ориентирован на исследование роста, например [1]. В России развивается направление анализа, ориентированное на поиск быстрорастущих компаний, такой взгляд отражен, например, в [2, 3], а закономерностям циклов жизни российских быстрорастущих компаний посвящена работа [4]. В докладе рассматриваются дополняющие такие подходы вопросы особенности динамики групп стабильных компаний не только с высоким темпом роста выручки, но и претерпевших значительное падение выручки. Для анализа общих закономерностей развития стабильных российских компаний рассматриваются закономерности развития компаний в зависимости от их реакции на посткризисные изменения экономической ситуации в 2010-2014 годах. Анализируется описание моделями разного типа динамики медианной выручки трех групп компаний, сформированных в зависимости от степени темпов прироста выручки за посткризисные годы с 2010 по 2014. Группы были сформированы в ходе выявления общих закономерностей динамики выручки среди наиболее стабильных российских компаний. Данные о выручке стабильных компаний в отчетности Росстата с 2003 по 2022 годы отвечали следующим требованиям: выручка в любой год не менее 1 миллиона рублей; данные есть за каждый год (без пропусков)¹. Всего российских компаний, отвечающих таким критериям отбора, оказалось 23943. По темпам прироста выручки с 2010 по 2014 годы были сформированы группы компаний с максимальным положительным и отрицательным приростами, средним приростом.

В докладе показано, что развитие некоторых групп компаний в момент перестройки экономики после кризиса с 2010 по 2014 годы определило их дальнейшие закономерности динамики темпов прироста медианной выручки до 2019 или 2022 годов. Этот эффект особенно четко проявляется для групп компаний, сформированных в зависимости от экстремальных (минимальных или максимальных) темпов прироста выручки компаний с 2010 по 2014 годы. В каждой из рассматриваемых групп 2394 компании. Модели регрессионного анализа для каждой группы строятся на основании данных о медианной выручке.

В первую группу вошли компании, наиболее успешно адаптировавшиеся к посткризисным изменениям экономики, их темпы прироста выручки за 2010-2014 годы превышали 90 перцентиль от всей совокупности компании. Медианная выручка этой группы обозначена «90-50». Вторую группу образовали компании с отрицательными темпами прироста менее 10 перцентиль темпов. Медианная выручка этой группы обозначена «10-50». Эти группы представляют две крайности развития после кризиса – самый быстрый рост и самое большое падение. Такие варианты динамики дополняет третья группа, сформированная из компаний со средними темпами прироста выручки за 2010-2014 годы – от

¹ Благодарность. Автор признателен руководителям Института менеджмента инноваций Высшей школы бизнеса НИУ ВШЭ С.Д. Розмировичу и А.К. Степанову за помощь в сборе материалов в рамках совместных работ.

45 по 55 перцентиля. Медианная выручка этой группы обозначена «(45-55)-50». Динамика выручки каждой из групп, представлена на рисунке 1. Графики динамики каждой группы приведены отдельно из-за разных величин медианных выручек в каждой группе.

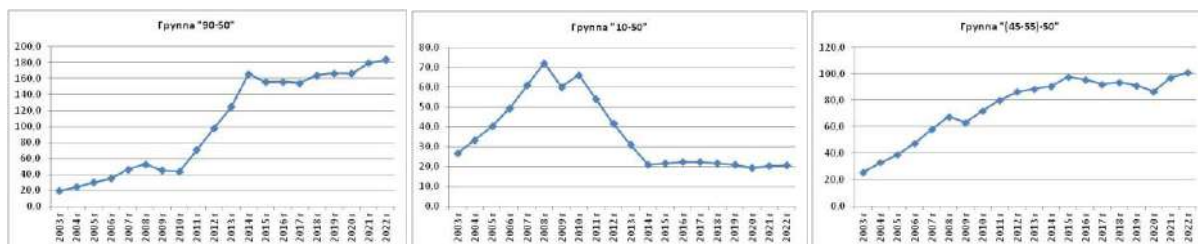


Рис. 1. Динамика медианных выручек групп (млн. руб.)

Как видно на графиках медианные выручки двух групп компаний («90-50» и «10-50») резко изменились за период с 2010 по 2014 годы, в то время как динамика группы «(45-55)-50» не претерпела таких резких изменений. После 2014 года наступила новая экономическая ситуация, поэтому анализ динамики выручки групп проведен начиная с этого момента. Кроме того, рассмотрены два варианта регрессионных моделей. Первые модели были получены как описание темпов прироста выручки с 2014 по 2019 годы, а вторые с 2014 по 2022 год. Такое разбиение диктуется тем, что в 2020 году был ковидный кризис. Поэтому сравнения основных закономерностей развития компаний проведены до ковидной ситуации (2019 год) и в целом, за период до 2022 года. Регрессионные модели, описывающие динамику темпов прироста медианной выручки, отражают общие закономерности развития групп компаний. Для более полного представления о закономерностях развития используется разные варианты моделей регрессионного анализа.

1. Линейная модель регрессионного анализа на базе нелинейного отображения

Для возможности интерпретации коэффициентов моделей регрессионного анализа в категориях нелинейной динамики их структуры выбраны аналогично [5], как связанные с нелинейными отображениями, отражающими влияние глубокой предыстории. Будем описывать, что потенциал развития компании (по выручке), определяется текущим потенциалом (текущим размером условной рыночной ниши) и может меняться в зависимости от значений выручки в прошлом, но при этом степень влияния предыстории заранее неизвестна. Тогда для первоначального анализа динамики медианной выручки рассматриваемых групп российских компаний целесообразно воспользоваться нелинейным отображением, описывающим развитие компании в рыночной нише, при этом учитывающее влияние предыстории на текущие значения процесса. Для анализа динамики выручки целесообразно описать текущее значение выручки X_n отображением:

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-1}Q(R - \rho_{lag1}X_{n-1} - \rho_{lag2}X_{n-2} - \rho_{lag3}X_{n-3} - \dots), \quad (1)$$

где: n – дискретное время, в данном случае это годы отчетности компаний; Q – интенсивность изменения выручки при отсутствии ограничений; R – ограничение процесса, (потенциал развития компании – размер условной рыночной ниши); ρ_{lagi} – масштабирующие коэффициенты значений процесса, характеризующие влияние предыдущих состояний на текущий потенциал развития. Приращение выручки будет зависеть от оставшейся незанятой части рыночной ниши и ее изменений за счет влияния предыстории, эту ситуацию описывает выражение в скобках. На базе модификаций отображения (1) получены два типа моделей: «модели регрессионного анализа» – для описания закономерностей динамики выручки групп компаний на больших временных интервалах; «модели нелинейной динамики», которые использовались для описания кратковременных тенденций и оценки текущих изменений под воздействием внешних факторов.

Нелинейные модели анализа кратковременных тенденций и текущих изменений под воздействием внешних факторов, влияющих на выручку, были созданы на базе отображения (1) с единственным масштабирующим коэффициентом ρ_{lag1} :

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-1}Q(R - \rho_{lag1}X_{n-1}). \quad (2)$$

Такая модель названа «базовой», для вычисления текущих значений ее параметров по эмпирическим данным требуется три подряд значения процесса. Анализ изменений тенденций под влиянием внешних факторов проводится методом «скользящее временное окно». Эта модель отвечает

критериям теории универсальности М. Фейгенбаума [6], ее свойства используются при интерпретации значений параметров упрощенных регрессионных моделей. Кроме того, более углубленное представление о характере динамики на первом этапе исследований дает модификация базовой модели введением дополнительного члена $-\rho_{lag2}X_{n-2}$ в отображение (2). Это позволяет рассмотреть влияние предыстории на анализируемый процесс. При определении параметров модифицированной модели требуется пять значений процесса. Для модифицированной модели определение значения особой точки и ее устойчивости рассмотрено в [7]. В данном исследовании с использованием базовых моделей и их модификаций определено время посткризисного перехода стабильных российских компаний к новой экономической ситуации – с 2010 по 2014 годы. Закономерности темпов прироста выручки групп после 2014 года получены в виде моделей регрессионного анализа.

При использовании отображения (1) в анализе возникает проблема, какая его структура необходима для корректного описания конкретного процесса изменения темпов прироста медианной выручки? Речь идет о поиске статистическими методами параметров моделей необходимых для исследования данных нелинейных процессов. Оценить степень адекватности альтернативных моделей и выбрать среди них соответствующую задачам анализа, позволяют оценки R-квадрат моделей, скорректированные на объем используемых данных и сложность моделей.

Для осуществления перехода от нелинейного отображения (1) к линейной модели регрессионного анализа перенесем X_{n-1} в левую часть отображения (1), затем разделим левую и правую части на X_{n-1} . В результате, раскрыв скобку, получим следующее отображение:

$$\frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}} = QR - Q\rho_{lag1}X_{n-1} - Q\rho_{lag2}X_{n-2} - Q\rho_{lag3}X_{n-3} - \quad (3)$$

В левой части отображения (3) в результате преобразований стоит выражение для текущих темпов прироста выручки, обозначим его:

$$\frac{X_n - X_{n-1}}{X_{n-1}} = \omega_n \quad (4)$$

Тогда выражение (3) с учетом обозначения (4) представляет собой зависимость изменения темпов прироста выручки. Такую зависимость для анализируемого временного интервала можно представить в виде линейной модели регрессионного анализа, описывающей тенденцию изменения темпов прироста выручки на основе отображения (1):

$$\omega_n = Q_{reg}R_{reg} - Q_{reg}\rho_{lag1}X_{n-1} - Q_{reg}\rho_{lag2}X_{n-2} - Q_{reg}\rho_{lag3}X_{n-3} - \dots + e_n, \quad (5)$$

где: Q_{reg} – оценка средней за рассматриваемый временной интервал интенсивности процесса; R_{reg} – оценка среднего значения ограничения процесса (потенциала роста); e_n – случайное возмущение. Переход от отображения (1), к модели регрессионного анализа (5) заключается не только в использовании новых переменных с дополнительным индексом. Этот переход позволяет установить взаимосвязь параметров исходных нелинейных моделей и коэффициентов линейных регрессионных моделей. На основе эмпирических данных мы можем получить оценки коэффициентов линейной модели регрессионного анализа, представленной в виде:

$$\omega_{n+1} = const + \zeta X_n + \zeta_{lag1}X_{n-1} + \zeta_{lag2}X_{n-2} + \zeta_{lag3}X_{n-3} + \dots + \xi_n, \quad (6)$$

где: $const$ и ζ_{lagi} – коэффициенты линейной модели регрессионного анализа; ξ_n – невязки модели.

Регрессионные модели (5) и (6) оказываются эквивалентными, их коэффициенты связаны соотношениями: $const$ – оценка $Q_{reg}R_{reg}$; ζ_{lagi} – оценки $-Q_{reg}\rho_{lagi}$. Точность рассматриваемой модели в описании эмпирических данных с поправкой на объем исходной выборки и сложность модели (число неизвестных параметров), можно оценить скорректированным значением R-квадрат.

Необходимо подчеркнуть, что регрессионные модели (5) и (6) описывают изменения темпов прироста выручки, а нелинейные модели на базе отображения (1) описывают закономерности текущих изменений медианной выручки – у моделей разные описываемые переменные.

С учетом отображения (1), являющегося и основой нелинейной модели для анализа текущих изменений, все коэффициенты линейной регрессии оказываются взаимосвязаны с нелинейной моделью, что позволяет интерпретировать результаты регрессионного анализа в категориях нелинейной динамики. Это позволяет наглядней понять закономерности развития компаний и оценить потенциальные возможности управления развитием групп компаний с определенными свойствами. Кроме того, на основании значений коэффициентов регрессионных моделей появляются возможности

оценить такие характеристики нелинейных процессов как значение и устойчивость особой (неподвижной) точки, значение коэффициента влияния предыстории, значение нормированной интенсивности изменения выручки. По скорректированному значению R-квадрат конкретного варианта модели можно косвенно оценить степень точности получаемых оценок описания нелинейной динамики.

В зависимости от знаков коэффициентов регрессии модель (6) может учитывать, как влияние положительных для развития компаний факторов, обеспечивающих больший рост так и обратный эффект. Влияние внешних факторов на процесс, проявляется через данные о предыстории. Для сопоставимости степени влияния разных факторов на темпы прироста медианной выручки в таблицах далее будут приведены Бета-коэффициенты (стандартизированные коэффициенты) регрессионных моделей. Знаки Бета-коэффициентов и их величины несут информацию о соотношениях благоприятных и неблагоприятных для развития компаний факторов, а сравнение значений Бета-коэффициентов позволяет оценивать в модели степень влияния различных моментов предыстории. Все приводимые далее расчеты моделей регрессий выполнены с использованием статистического пакета SPSS, терминология регрессионного анализа в докладе соответствует этому пакету.

2. Статистически значимые предикторы моделей темпов прироста выручки

В качестве первого шага получим для диапазонов 2014-2019 и 2014-2022 лет для каждой группы регрессионные модели статистически значимых предикторов из 11 альтернативных. Воспользуемся для этого методом шагового включения предикторов. Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1. Статистически значимые Бета-коэффициенты регрессионных моделей темпов прироста выручки компаний. Значения особых точек и коэффициентов предыстории определены непосредственно по значениям параметров регрессионных моделей

Группа	10-50		90-50	
	2014-2019	2014-2022	2014-2019	2014-2022
Лаг 1	-1,07	-1,174	-1,024	-1,376
Лаг 6	0,15	0,362		
Лаг 7			0,26	
Лаг 8				0,805
Лаг 9			-0,094	
Скорректированный R-квадрат	0,995	0,954	0,999	0,586
Особая точка (млн. руб.)	20,8	20,2	157,6	185,7
Коэффициент предыстории	0,03	0,05	0,16	0,2

Источник: Расчеты автора по базе данных ИАС «FIRA PRO» (Первое Независимое Рейтинговое Агентство, ООО «ПНРА»).

Первое, что следует отметить – невозможность получить методом шагового включения статистически значимую регрессионную модель динамики медианной выручки группы компаний «(45-55)-50». Из этого следует, что в этой группе компаний средних по темпам прироста за 2010-2014 годы оказались компании с настолько разными вариантами развития, что невозможно выявить статистически значимые общие закономерности. Для компаний из этой группы оказались важными разные состояния в предыстории. В дальнейшем целесообразно описывать закономерности динамики компаний этой группы по подгруппам в зависимости от выручки.

Зато компании экстремальные в развитии, как очень успешно развивавшиеся, так и очень неудачно, имеют четкие закономерности динамики медианной выручки в посткризисный период с 2014 года. В моделях каждой группы есть статистически значимые предикторы. Причем в моделях разных групп используемые предикторы с высокой точностью описывают динамику темпов прироста выручки – скорректированные значения R-квадрат близки к единице. Перед нами статистически обоснованный факт: сформировавшиеся за время с 2010 по 2014 годы закономерности развития компаний, определили динамику темпов прироста выручки как минимум до 2019 года. Следует подчеркнуть, что на значения медианной выручки этих групп компаний влияли, как минимум два значительных разнородных фактора – собственное развитие компаний и ценовые изменения в экономике, тем не менее, эти модели достаточно точны в описании процессов. Как наиболее успешно адаптированные,

так и наименее успешные в адаптации компании, развивались в посткризисный период с 2014 по 2019 годы по собственным, но четко проявившимся закономерностям. Они проявились и в значениях коэффициентов влияния предьстории, которые дают представление об особенностях динамики и в таких категориях. Значения коэффициентов говорит о положительном влиянии предьстории на потенциал роста, однако степень этого влияния различна – положительный эффект от влияния предьстории гораздо больше проявляется в динамике группы «90-50» (0,16), а у группы «10-50» он минимален (0,03).

Выявленные закономерности поведения компаний в ходе адаптации к новым экономическим условиям позволяет использовать их для разработки методов управления развитием части компаний. Можно разрабатывать меры управления для экстремальных по динамике адаптации к изменениям экономической среды групп. Например, по регрессионной модели группы неудачников «10-50», где могут оказаться значимые для России компании, видно, что разовые мероприятия поддержки дадут небыстрые результаты (положительный лаг 6), кроме того, эффект будет незначительный – крайне малое значение коэффициента предьстории у группы «10-50» говорит об очень слабом ее влиянии. Как видно из таблицы 1 с началом более благоприятного для российских компаний времени малое значение коэффициента влияния предьстории увеличилось незначительно. Напротив, компании с высокой динамикой адаптации имеют достаточно значительный коэффициент влияния предьстории, позволяющий оценивать текущую эффективность развития компаний, соответственно дополняя критерий «нужность», критерием «эффективность поддержки».

Эти результаты, получены по данным за период достаточно однородной экономической ситуации. Рассмотрим регрессионные модели за большой промежуток времени с 2014 по 2022 годы. С точки зрения общих позиций этот временной участок нельзя признать однородным, сюда попали существенные изменения экономики и производства, связанные с Ковидом и введением новой волны санкций в 2022 году. Параметры моделей для такого временного диапазона приведены в таблице 1.

И в этом временном диапазоне статистически значимые модели регрессионного анализа для медианной выручки группы «(45-55)-50» получить невозможно – в группе и за такой период слишком разнородная динамика.

Для других групп модели шагового включения получены. Рассмотрим изменения для этого периода оценок скорректированных значений R-квадрат в моделях за 2014-2022 годы. Для модели динамики темпов прироста выручки группы «10-50» структура значимых предикторов не поменялась, а значение R-квадрат изменилось незначительно (с 0,995 до 0,954), продолжая говорить о высокой точности модели в описании закономерностей развития этой группы компаний. Незначительно поменялись оценки предельного состояния процесса – значение особой точки (с 20,8 до 20,2 млн. руб.) и коэффициента предьстории (с 0,03 до 0,05). Все это говорит о том, что закономерности развития компаний этой не адаптировавшейся к кризису группы слабо поменялась, незначительно ухудшившись в оценках значения особой точки и немного улучшившись в оценках влияния предьстории.

Модели динамики темпов прироста группы «90-50» претерпели значительные изменения. Поменялась структура статистически значимых предикторов: если самый значимый предиктор в виде «лага 1» остался, то единственным дополнением, связанным с предьсторией и отражающим ее положительное влияние оказался предиктор «лаг 8». Значение скорректированного R-квадрат существенно уменьшилось (с 0,999 до 0,586), но модель продолжает оставаться статистически значимой. Это говорит о том, что за период с 2020 по 2022 год закономерности развития существенно изменились – добавление новых данных поменяло описание общих закономерностей развития компаний. К чему привели эти изменения динамики темпов прироста после 2019 года можно оценить, сравнивая оценки значений особых точек (с 157,6 до 185,7 млн. руб.) и оценки коэффициентов влияния предьстории (с 0,16 до 0,20), изменения этих оценок говорят об улучшении динамики развития этой группы компаний.

3. Упрощенные модели с предиктором «лаг 1» и их точности

В двух вариантах моделей, полученных методом шагового включения из альтернативных 11 предикторов самая большая значимость (значения стандартизированных коэффициентов) у предиктора «лаг 1». Оценим, какова точность описания динамики разных групп при использовании только этого предиктора. Такие модели получены методами шагового включения для экстремальных по динамике за 2010-2014 годы групп, где предиктор «лаг 1» оказался статистически значимым, и принудительным включением для модели группы «(45-55)-50» не гарантирующим устойчивых статистических оценок. Результаты расчетов по данным с 2014 по 2019 годы приведены в таблице 2.

Таблица 2. Значения Бета-коэффициентов моделей с предиктором «лаг 1». Значения особых точек и коэффициентов предыстории определены непосредственно по значениям параметров регрессионных моделей

Группы	(45-55)-50		10-50		90-50	
	2014-2019	2014-2022	2014-2019	2014-2022	2014-2019	2014-2022
Лаг 1	-0,732	-0,569	-0,99	-0,943	-0,965	-0,799
Скорректированный R-квадрат	0,42	0,227	0,976	0,873	0,913	0,586
Особая точка (млн. руб.)	93,5	94,3	21,9	21,2	159,7	167,5

Источник: Расчеты автора по базе данных ИАС «FIRA PRO» (Первое Независимое Рейтинговое Агентство, ООО «ПНРА»).

Для оценки степени точности моделей с одним предиктором «лаг 1» сравним их значения R-квадрат с соответствующими моделями нескольких предикторов за период с 2014 по 2019 годы (см. таблицы 1 и 2). Для группы компаний «10-50» эти значения составляют 0,995 и 0,976 – незначительная потеря точности при использовании упрощений в описании закономерностей развития компаний. Для группы «90-50» значения составляют 0,999 и 0,913, изменение точности несколько больше, чем в предыдущей группе, но являются вполне допустимыми для анализа. Потеря точности говорит о том, что закономерности развития компаний более сложные, чем учет только их последнего состояния. Оценки параметров модели группы «(45-55)-50», полученные методом принудительного включения, несмотря на малое значение скорректированного значения R-квадрат, на качественном уровне являются непротиворечивыми по отношению к другим группами.

В качестве первого приближения такой подход применим для анализа развития компаний со значительной реакцией на изменение экономической ситуации. Это подтверждают и сравнения оценок пределов роста (значений особых точек в таблице 2), с полученными по более сложным по структуре моделям (таблица 1). Расхождение в оценках малы: для группы «10-50» это 20,8 и 21,9; для группы «90-50» 157,6 и 159,7. Кроме того, на основании сравнений Бета-коэффициентов можно сделать выводы о том, что наиболее значимо предыдущее состояние компании в группе «10-50» (0,99), менее значимо в группе «90-50» (0,965) и наименее значимо для нейтральных по реакции компаний группы «(45-55)-50» (0,732).

Из результатов, приведенных в таблице 2 можно сделать еще один важный вывод. Регрессионная модель с одним предиктором «лаг 1» демонстрирует достаточную точность, при этом сама модель является преобразованным нелинейным отображением (1). Это же нелинейное отображение является основой для базовой модели, используемой непосредственно для анализа текущих ежегодных изменений тенденций динамики. Высокая точность регрессионной модели с одним предиктором «лаг 1», описывающей динамику за период 2014-2019, подтверждает правильность выбора базовой модели на основе этого нелинейного отображения для анализа текущих изменений динамики выручки. Использование одного отображения в качестве основы для двух типов моделей позволяет анализировать результаты в единых категориях нелинейной динамики, рассматривая их как взаимосвязанные.

Рассмотренные выше результаты получены при анализе динамики моделями с одним предиктором, протекающей в достаточно однородной среде, но в 2020 году появилась новая ситуация в экономике. Рассмотрим, как она проявилась в параметрах моделей полученных для диапазона с 2014 по 2022 год, они представлены в таблице 2.

При появлении новых данных, отражающих изменения в экономике, точности моделей всех групп уменьшились, что свидетельствует о появлении новых закономерностей в развитии компаний. Степень новизны закономерностей можно оценить, сравнивая данные таблицы 2, что позволяет сделать следующие выводы. Сравнение скорректированных значений R-квадрат двух групп показывают, что и для периодов 2014-2019 годы и 2014-2022 годы точность описания закономерностей выше у моделей «10-50». Закономерности динамики группы «10-50» оказываются не сильно изменившимися по сравнению с периодом 2014-2019 (0,976 и 0,873), в то время как у группы «90-50» изменения больше (0,913 и 0,586). Оценки отклонений от сформировавшейся тенденций, получаемые по нелинейной базовой модели, для группы «90-50», буду за период 2018-2020 больше, чем у группы «10-50». В тоже время, оценки потенциалов развития компаний (значения особых точек в таблице 2) изменились незначительно, но по-разному. Так, полученные по статистически значимым моделям, они показали

для группы «90-50», значительное увеличение потенциалов роста с 159,7 до 167,5 миллионов рублей, а для группы «10-50» они незначительно снизились с 21,9 до 21,2 миллионов рублей. Статистически менее достоверные оценки моделей группы «(45-55)-50» незначительно увеличились с 93, 5 до 94,3 миллионов рублей.

4. Интерпретация упрощенных моделей в категориях нелинейной динамики и их использование в анализе

Кроме того, в регрессионных моделях с одним предиктором «лаг 1» появляется возможность оценивать устойчивость особой точки и описывать характер динамики на качественном уровне. Нелинейное отображение (1) с одним ненулевым коэффициентом у «лаг 1» соответствует критериям теории универсальности Фейгенбаума и характер его динамики, и устойчивость особых точек зависят от значений нормированной интенсивности – значения произведения потенциала развития процесса на его интенсивность. В моделях (5) и (6) эта связь выражается $const = Q_{reg}R_{reg}$. Нормировка нелинейного отображения позволяет рассматривать развитие процессов к единичной особой точке, поэтому можно сравнивать нормированные интенсивности разных процессов между собой. В случае линейной регрессионной модели с одним предиктором «лаг 1» значение константы является тем самым средним значением нормированной интенсивности нелинейного процесса, по которому можно оценить устойчивость особой точки и описывать динамику медианной выручки на качественном уровне. Значения констант регрессионных моделей приведены в таблице 3.

Таблица 3. Значения констант в упрощенных моделях с предиктором «лаг 1»

Группа	«(45-55)-50»	«10-50»	«90-50»
2014-2019	0,895	0,773	1,449
2014-2022	0,809	0,676	0,997

Источник: Расчеты автора по базе данных ИАС «FIRA PRO» (Первое Независимое Рейтинговое Агентство, ООО «ПНРА»).

При нормированной интенсивности (значении констант) в диапазоне больше нуля и до единицы увеличение значений медианной выручки (рост компаний) происходит по S-образной кривой к устойчивой особой точке. В этом случае, чем больше значения нормированной интенсивности, тем быстрее процесс приходит в окрестности единичного аттрактора, фактически по ним можно, на качественном уровне сравнивать скорости процессов на S-образных траекториях. По данным таблицы 3 за весь период наблюдения видно, что медленнее всех развивается процесс изменения медианной выручки группы «10-50», более высокая скорость развития компаний группы «(45-55)-50», наиболее высокая скорость у компаний группы «90-50». При нормированной интенсивности от единицы до двух особая точка устойчива, но в ее окрестностях возникают затухающие колебания, поэтому сравнивать скорость достижения аттрактора с другими моделями сложно. По данным, приведенным в таблице 3, можно сделать заключение, что большинство моделей показывали динамику медианной выручки групп компаний по S-образной траектории, за исключением периода с 2014 по 2019 годы, когда у группы «90-50» протекала более сложная динамика.

Сравнивая значения констант в моделях двух интервалов каждой из групп видно, что значения нормированных интенсивностей (значения констант) за период с 2014-2022 меньше, чем в моделях за интервал 2014-2019. Интерпретируя значения констант в категориях нелинейной динамики, как нормированные интенсивности процессов, можно говорить об уменьшении динамики развития компаний при оценках за период с 2014 по 2022. К этому привели замедление развития с 2020 года. при этом все траектории роста выручки соответствуют движению к устойчивым особым точкам (состояниям).

В пользу использования упрощенной модели для анализа динамики групп компаний говорит и факт о структурной близости моделей, проявляющийся в том, что при построении моделей регрессионного анализа всех групп методом принудительного включения любых из 11 альтернативных предикторов для достижения скорректированных значений R-квадрат равных единице требуются одинаковое число предикторов. Для получения таких моделей диапазона 2014-2019 годы в каждой модели потребовалось по пять предикторов, для диапазона 2014-2022 – восемь предикторов. В каждой из полученных моделей оказался очень значим предиктор «лаг 1». Таким образом, и структура регрессионных моделей и значимость везде предиктора «лаг 1» говорит об однородности, позволяющей широко использовать в анализе упрощенные модели с таким лагом.

Регрессионная модель с единственным предиктором «лаг 1» демонстрирует достаточную для первоначального анализа точность. При этом сама модель является преобразованным нелинейным отображением (1) с единственным ненулевым коэффициентом ρ_{lag1} . Такое же нелинейное отображение является основой для базовой модели, используемой для анализа текущих изменений тенденций нелинейной динамики выручки. Одинаковая структура двух типов упрощенных моделей и высокая точность такой регрессионной модели подтверждают целесообразность применения двух вариантов одностепенных моделей в задачах анализа быстрых изменений и выявления общих закономерностей нелинейной динамики. Это обеспечивает единый подход в трактовке получаемых с разных позиций результатов.

5. Заключение

Статистически устойчивые модели регрессионного анализа подтверждают, что развитие некоторых групп компаний в момент посткризисной перестройки экономики в 2010-2014 годах определило закономерности дальнейшей динамики их медианной выручки для группы динамичных компаний «90-50» до 2019 года, а для группы «10-50» до 2022 года. Этот эффект проявился наиболее ярко в двух группах компаний, с максимальной положительной и отрицательной реакцией на изменение экономических условий из-за мирового кризиса.

Линейные регрессионные модели, сформированные преобразованием нелинейного отображения (1), позволяют интерпретировать их в категориях нелинейной динамики.

Модели на базе нелинейного отображения с учетом только «лаг 1» позволяют проводить упрощенный анализ развития компаний, получая, как описание закономерностей динамики в целом, так и оценки текущих изменений тенденций развития.

Для использования в инвестиционных проектах дальнейший анализ закономерностей динамики медианных выручек компаний целесообразно проводить с разбиением рассмотренных групп на подгруппы в зависимости от выручки. Кроме того, методы получения моделей регрессионного анализа, наряду с шаговым включением предикторов, целесообразно дополнить методами принудительного включения предиктора. Модели принудительного включения предикторов позволяют более гибко отражать закономерности изменения динамики выручки для всех трех групп, в том числе и для группы «(45-55)-50».

Литература

1. *Coad A.* The Growth of Firms: a Survey of Theories and Empirical Evidence. Cheltenham, UK: Edward Elgar Publishing, 2009. – 208 p.
2. *Медовников Д.С., Розмирович С.Д., Оганесян Т.К., Прохин Е.А., Потапов Н.А., Мазурова С.А., Степанов А.К.* Быстрорастущие компании: вклад в рост экономики и устойчивость к кризисам. Российский и международный опыт / под общ. ред. Д. С. Медовникова; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2024. – 130, [2] с. – (Аналитические доклады Высшей школы бизнеса ВШЭ; вып. 8).
3. *Наумова К.А.* Многообразие критериев и методов идентификации быстрорастущих компаний // Вестник Челябинского государственного университета. – 2024. – № 10 (492). – С. 128–138. DOI:10.47475/1994-2796-2024-492-10-128-138.
4. *Баранова Е.И., Юданов А.Ю.* Стилизованный цикл жизни быстрорастущих фирм в России // Вопросы экономики. – 2022;(3). – С. 77–97. DOI:10.32609/0042-8736-2022-3-77-97.
5. *Полунин Ю.А.* Синтез методов нелинейной динамики и регрессионного анализа для исследования социально-экономических процессов // Проблемы управления. – 2019. – № 1. – С. 32–44.
6. *Фейгенбаум М.Ж.* Универсальность в поведении нелинейных систем / Пер. С.Г. Тиходеева // Успехи физических наук. – 1983. – Т. 141, Вып. 2. – С. 343–374.
7. *Полунин Ю.А.* Оценка значений особых точек и их устойчивости для двумерных отображений с учетом влияния предыстории / Труды 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2024). М.: ИПУ РАН, 2024. – С. 713–717.