СЕКЦИЯ 1

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЕМ КРУПНОМАСШТАБНЫХ СИСТЕМ, ВКЛЮЧАЯ ТНК, ГОСХОЛДИНГИ И ГОСКОРПОРАЦИИ

ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТИЧНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Акинфиев В.К., Бешкарев В.А.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
akinf.valery@yandex.ru, beshkarev.vadim@bk.ru

Аннотация. В данной статье рассматриваются современные прикладные задачи, формализуемые в виде квадратичной задачи о назначениях (QAP) и её обобщений. Анализируются основные математические постановки, особенности учёта нелинейных взаимодействий между объектами, а также современные методы решения, включая точные алгоритмы, эвристики и гибридные подходы. Представлены примеры успешного применения QAP для повышения эффективности и надежности систем в реальных условиях. Настоящий обзор подчёркивает важность развития универсальных и масштабируемых методов оптимизации для решения сложных задач.

Ключевые слова: квадратичная задача о назначениях; комбинаторная оптимизация; прикладные задачи оптимизации.

Введение

Квадратичная задача о назначении (Quadratic assignment problem, QAP) является одной из сложных проблем комбинаторной оптимизации в классе NP-трудных задач. Впервые QAP была сформулирована в работе Купманса и Бекмана [1], в которой было предложено использовать ее в качестве математической модели, связанной с экономической деятельностью.

С тех пор появилось множество практических приложений этой задачи в нескольких областях, таких как размещение объектов по некоторой территории с учетом их взаимосвязи, параллельные и распределенные вычисления и комбинаторный анализ данных, задачи минимизации количества соединений между компонентами при проектировании цифровых вычислительных устройств и печатных плат и многие другие.

С момента своей первой формулировки и до сих пор QAP привлекает внимание исследователей по всему миру не только из-за своей практической важности, но и теоретического интереса к разработке методов и алгоритмов решения задач этого класса. Более того, несколько ранее известных классических задач комбинаторной оптимизации, такие как задача коммивояжера, задача о рюкзаке, задача о разбиении графа на подграфы с минимальной связностью, задача о клике могут быть сформулированы как частные случаи QAP.

Первоначально формулировка задачи состояла в следующем: найти оптимальный вариант размещения n объектов по n локациям таким образом, чтобы каждый объект был размещен ровно в одной локации. Предполагается, что число объектов и число локаций совпадает и равно n. В задаче предполагаются известными расстояния между локациями, потоки между объектами и затраты на размещение объектов в локации. QAP заключается в поиске варианта размещения объектов в локации, который минимизирует общие затраты размещение объектов в локации и затраты на передачу потоков между объектами, вычисляемых как сумму всех возможных произведений расстояний между локациями и потоками между объектами. Было показано, что QAP является NP-трудной и, в общем случае, задача размером $n > 30$ не могут быть решены за приемлемое время.

В дальнейшем был сформулирован более общий случай задачи QAP [2], который был назван обобщенной квадратичной задачей о назначении (GQAP). GQAP формулируется как задача минимизации общей стоимости парного взаимодействия между m объектами (оборудованиями, задачами или др.) и n локациями (мест возможных размещений объектов) с учетом требований объектов и имеющихся ресурсов в локациях. Примером таких задач может служить, например, нахождение оптимального назначения задач обработки информации по распределенным компьютерным процессорам, каждый из которых имеет ограниченные вычислительные мощности. Заметим, что существенными отличиями GQAP от QAP являются следующее: количество объектов больше, чем количество локаций, что приводит к тому, что в каждую локацию может быть размещено более одного объекта и каждая локация характеризуется некоторой предельной емкостью, которая задает ограничение на возможное размещение в ней объектов.

Статья построена следующим образом. В первой части рассматриваются задачи QAP и GQAP и дается краткий обзор формулировок, интерпретаций и методов решений. Во второй части приводятся прикладные задачи оптимизации в различных профессиональных областях с последующим приведением к QAP с анализом их решения.

1. Формулировки задач QAP и GQAP, краткий обзор методов решения

Следует заметить, что рассматриваемые здесь задачи имеют много вариантов формулировок, основанных на различных подходах к ее формализации и методам решения. Мы попытаемся лишь перечислить некоторые из них в соответствии с используемой техникой, выделив наиболее важные, такие как целочисленное программирование, дискретная и комбинаторная математика, теория графов и групп. Большинство этих формулировок эквивалентны, за исключением тех, которые характеризуют более общие проблемы.

1.1. Формулировка QAP

Сначала мы рассмотрим QAP в виде задачи целочисленного (булевого) программирования. Данная формулировка была первоначально предложена в [1] и позже использовалась во многих работах, в том числе и в последнее время [3-5].

Пусть задано n объектов и n локаций. Мы рассматриваем f_{ik} как поток между объектами i и k, а d_{jp} – расстояние между локациями j и p. Если мы рассмотрим стоимость распределения объектов по локациям, то общая форма QAP порядка n задается тремя матрицами $F = [f_{jk}]$, $D = [d_{jp}]$ и $B = [b_{ij}]$, первые две матрицы определяют потоки между объектами и расстояния между локациями, а bij – стоимость распределения объектов по локациям. Эту задачу можно сформулировать следующим образом:

$$\min \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{j,p=1}^{n} f_{ik}\, d_{jp}\, x_{ij}\, x_{kp} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_{ij} \tag{1}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad 1 \le j \le n \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad 1 \le i \le n \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad 1 \le i,j \le n \tag{4}$$

Здесь x_{ij} – булева переменная, которая задает распределение объектов по локациям. Поскольку линейный член в (1) не усложняет решение задачи, то его можно отбросить. Более общая формулировка QAP представлена далее (5), где c_{ijkp} затраты, которые не обязательно соответствуют произведениям потоков и расстояний.

$$\min \sum_{i,k=1}^{n} \sum_{j,p=1}^{n} c_{ijkp}\, x_{ij}\, x_{kp} \tag{5}$$

$$s.t. \qquad (1.2), (1.3), (1.4).$$

1.2. Формулировка в виде задачи смешанного целочисленного линейного программирования

Данная техника использует метод релаксации исходной задачи, который состоит в замене квадратичных членов в (1–5) линейными. Например, используя две переменные:

$$c_{ijkp} = f_{ik}\, d_{jp} \quad \text{и} \quad y_{ijkp} = x_{ij}\, x_{kp} \qquad 1 \le i,j,k,p \le n$$

Это позволяет представить QAP в виде смешанной задачи линейного программирования (MILP)

В целом, линеаризации QAP, основанные на моделях MILP, представляют большое число переменных и ограничений, что делает этот подход достаточно затратным. Так, например, формулировка, представленная в [6], описывает QAP в линейной форме, используя n^4 действительных переменных, n^2 булевых переменных и $n^4 + 4n^3 + n^2 + 2n$ ограничений. Однако эта линеаризация, вместе с некоторыми ослаблениями ограничений, приводят к достижению значительно улучшенных нижних границ для поиска оптимального решения [7-9].

1.3. Формулировка в терминах графов и групп

В [10, 11] предложен алгебраический подход на основе теории графов, использующий автоморфизмы линейных графов. Линейный граф заданного графа G, обозначаемый $L(G)$, определяется путем взятия каждого ребра G в качестве вершины $L(G)$, в то время как ребро $L(G)$ определяется как пара ребер, которые являются смежными в G. Автоморфизм графа – это перестановка его вершин, которая сохраняет ребра. Множество всех автоморфизмов G вместе с композицией перестановок является группой, обозначаемой как $Aut(L(G))$ [12]. Из теоремы Уитни следует, что, если $G = K_n$, $n \neq 2$ и 4, то $Aut(G)$ и $Aut(L(G))$ являются изоморфными группами. Основываясь на этом результате в [11] показано, что решение QAP означает либо нахождение перестановки $\pi \in Sn$, либо нахождение автоморфизма $L(K_n)$, который является перестановкой $C_{n,2}$, которая минимизирует следующее выражение:

$$\min_{\pi \in Aut\,(L(K_n))} \sum_{i=1}^{N} f_i d_{\pi(i)} \tag{6}$$

1.4. Обобщенная квадратичная задача о назначениях

Пусть имеется n объектов и m локаций (рюкзаков). Обобщенная задача назначения (GQAP) заключается в поиске оптимального назначения каждого объекта ровно в один рюкзак, не превышая заданной вместимость рюкзака. Ли и Ма [2] лишь недавно сформулировали GQAP. Однако проблемы, которые являются ее частными случаями, включая QAP, давно интересуют исследователей в различных областях, как из-за их широкой применимости, так и из-за их разработки разнообразных методов решения.

Формулировка GQAP:

$$\min \sum_{i,k}^{M} \sum_{j,p}^{N} c_{ijkp}\, x_{ij}\, x_{kp} + \sum_{i,j} b_{ij}\, x_{ij} \tag{7}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{M} a_{ij}\, x_{ij} \leq S_j \qquad 1 \leq j \leq N \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad 1 \leq i \leq N \tag{9}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad 1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N, \tag{10}$$

где b_{ij} – стоимость назначения объекта i в местоположении j; c_{ijkp} – квадратичная стоимость назначения объекта i в местоположении j и объекта k в местоположении p, Особый случай – $c_{ijkp} = f_{ik} d_{jp}$ где f_{ik} – поток между объектами i,k, а d_{jp} – расстояние между локациями j,p. Искомая переменная назначения x_{ij} равно 1, если объект i назначен в локацию j, a_{ij} – необходимое пространство для назначения объекта i в локацию j, S_j – это суммарное пространство в локации j. M – количество объектов, N — количество локаций.

Точные методы решения для задач типа GQAP оказались успешными только для небольших случаев (приблизительно M<30). В результате исследователи приложили значительные усилия для разработки эвристических методов, которые получают хорошие субоптимальные решения, используя разумное количество процессорного времени.

1.5. Краткий обзор методов решения

Следует заметить, что существует большое количество работ, содержащих обзоры по методам решения задач QAP и GQAP, например, [16-19]. Различают две категории методов, используемые в задачах комбинаторной оптимизации, точные или эвристические.

Точные методы, используемые для поиска глобального оптимума QAP, включают различные модификации и алгоритмы метода ветвей и границ, которые отличаются стратегиями и правилами ветвления и нахождения оценок (границ). Процедура ветвления состоит в разбиении множества допустимых значений переменной на непересекающиеся подмножества меньших размеров, образуя дерево решений. Процедура нахождения оценок заключается в поиске верхних и нижних границ для целевой функции на подмножестве решений, которые используются для отсечения подмножеств дерева решений, которые заведомо не содержат оптимальное решение задачи.

В последние годы широко используются процедуры, сочетающие методы ветвей и границ, методов отсекающих плоскостей или комбинации этих методов, включая динамическое программирование с параллельной реализацией. Благодаря им достигаются наилучшие результаты для решения QAP.

В ряде специальных случаев формулировки QAP в терминах графов удается разработать полиномиальные алгоритмы решения. При этом используются специальные структуры связей между объектами и локациями QAP. Например, для задач размещения изоморфных графов специальной структуры, размещения деревьев на цепи и другие. Среди основных направлений исследования QAP в терминах матриц можно выделить поиск сильно разрешимых случаев. Они представляют собой такие условия на матрицы, при которых решение задачи является заранее заданной подстановкой [18].

Для приближенного решения QAP и GQAP применяются широкий арсенал эвристических методов, таких как имитация отжига, поиск с запретами, жадный рандомизированный поиск, генетические алгоритмы и муравьиные системы. Поскольку рассматриваемые задачи в общем случае являются NP-трудными задачами, особый интерес представляют полиномиальные разрешимые особые случаи. Более подробный анализ методов решения можно найти в [16-18].

2. Применение квадратичной задачи о назначениях в прикладных задачах оптимизации

QAP может служить универсальной моделью для формализации широкого спектра прикладных задач, где необходимо учитывать не только индивидуальные затраты на назначение объектов, но и взаимодействия между парами назначений. Благодаря своей гибкости, квадратичная задача о назначениях находит применение в самых разных областях.

2.1. Беспроводные сенсорные сети

В статье [15] рассматривается задача оптимальной маршрутизации в беспроводных сенсорных сетях. Основная проблема заключается в том, что существует множество путей передачи данных от сенсора к базовой станции (sink), но выбор неэффективного пути приводит к быстрой разрядке узлов на маршруте в виду ограниченного ресурса энергии (батареи). Поскольку передача данных на большие расстояния требует его в больших количествах, необходимо разработать такой протокол маршрутизации, который будет балансировать энергопотребление узлов, продлевая общий срок службы сети.

Особенность математической постановки состоит в следующем:

- Рассматриваемая в статье модель сети состоит из трёх типов узлов: сенсорные узлы (источники данных), промежуточные узлы (ретрансляторы) и узлы-приёмники (sink);
- Задача сводится к поиску пути передачи данных, балансирующего нагрузку между узлами. Протокол использует таблицы идентификаторов соседних узлов с двумя полями: Sid (идентификаторы сенсорных узлов) и Did (идентификаторы sink). Математически маршрутизация моделируется через обновление и передачу идентификаторов по сети, что формирует путь от источника к sink.

Целевая функция имеет квадратичную форму, учитывающую не только затраты, но и взаимодействия между парами узлов, что отражает влияние маршрута на общую энергоэффективность сети. Формально, если обозначить множество узлов N, а x_{ij} – бинарную переменную, равную 1, если узел i назначен на позицию j в маршруте, то задача минимизации выражается как

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ijkl}\, x_{ij}\, x_{kl}, \quad (11)$$

где c_{ijkl} – коэффициенты, отражающие энергозатраты и взаимодействия между назначениями узлов i и k на позициях j и l.

В рассматриваемой модели количество узлов варьировалось от 10 до 100, размещение случайное с равномерным распределением. Радиус передачи – 10 м, пакет – 64 байта, трафик – постоянный битрейт 0.5 пакетов/сек, начальная энергия каждого узла – 10 Дж.

Для выбора маршрута с минимальными затратами энергии использовалась техника квадратичного присваивания, которая в теории оптимизации решает задачи распределения ресурсов с учётом взаимодействия между объектами.

Метод решения данной задачи описывается следующим образом:

- Инициализация сети: каждый узел посылает свой идентификатор соседям, формируя таблицы Sid и Did;

- Обнаружение маршрута: при возникновении события сенсорный узел посылает свой идентификатор соседям. Узлы обновляют таблицы, передавая идентификаторы sink и сенсоров, формируя путь передачи данных;
- Выбор маршрута: путь фиксируется после первого прохождения данных, далее они передаются только по этому пути;
- Обработка циклов: чтобы избежать рекурсии при передаче, узел не посылает данные обратно узлу, от которого их получил;
- Резервные пути: если доступны несколько sink, выбирает один случайным образом, остальные используются как резервные;
- Балансировка нагрузки: протокол старается не использовать один тот же путь постоянно, чтобы не разряжать одни и те же узлы.

Таким образом, описанный протокол маршрутизации формулируется как задача квадратичного назначения. Ограничения обеспечивают корректность маршрута: каждое место занимает ровно один узел, а каждый узел назначения не более чем на одну позицию. Дополнительно учитываются ограничения, связанные с радиусом передачи, допустимостью связей между узлами и ресурсными ограничениями. Это позволяет протоколу формировать оптимальные маршруты с учётом энергозатрат. В сравнении с классическими методами маршрутизации, наподобие минимального энергопотребления, балансировка нагрузки позволяет продлить жизненный цикл сети, а использование резервных путей повышает надёжность передачи данных.

2.2. Управление размещением данных

В статье [20] рассматривается задача эффективного управления размещением данных клиентов мультиклиентском кластере баз данных для облачных приложений (SaaS). Ключевая цель – балансировка нагрузки между серверами кластера, обеспечение изоляции данных, отказоустойчивости и рационального использования вычислительных ресурсов.

Проблема формализуется как задача оптимального распределения множества клиентов по множеству серверов с учётом ограничений на ресурсы и необходимости резервирования данных. Имеется M серверов и N клиентов, каждый клиент генерирует поток запросов, серверы имеют ограниченную вычислительную мощность.

Вводится метрика эффективности балансировки нагрузки [20, (1), стр. 16]

$$f = \sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\sum_{j=1}^{N} load\ (i,j)}{\sum_{j=1}^{N} \lambda_j} - \frac{\bar{\lambda_i}}{\sum_{i=1}^{M} \bar{\lambda_i}} \right)^2, \tag{12}$$

где

- λ_j – нагрузка на кластер от потока запросов j-го клиента;
- $load(i,j)$ – нагрузка на i-й сервер от потока запросов j-го клиента (с учетом репликации данных в кластере);
- $\bar{\lambda_i}$ – мощность i-го сервера БД.

Данная задача является обобщённой квадратичной задачей о назначениях GQAP. Число клиентов и серверов различно, на сервер можно назначить несколько клиентов с учётом ограничений по ресурсу («вместимости»), метрика (12) учитывает как индивидуальные затраты (нагрузка клиента на сервер), так и взаимодействия между парами клиентов (общая нагрузка на серверы).

Формально минимизация дисбаланса нагрузки между серверами с учетом (12) имеет постановку вида

$$\min \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{ik}\, x_{ij}\, x_{kj} \right), \tag{13}$$

где

- c_{ij} – нагрузка от клиента i на сервер j;
- d_{ik} – дополнительная нагрузка из-за взаимодействия клиентов i и k.

Формальная постановка ограничений:

- Вместимость серверов:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\, x_{ij} \le R_j, \forall j \in M, \tag{14}$$

где r_i – ресурсы, потребляемые клиентом i, R_j – ёмкость сервера j.

- Резервирование данных. Каждый клиент должен быть размещён на $k \ge 1$ серверах:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq k, \forall i \in N . \quad (15)$$

- Уникальность мастер-копий. Для каждого клиента только одна мастер-копия:

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1, \forall i \in N , \quad (16)$$

В рассматриваемой статье представлены два метода стохастической метаэвристики для поиска приближённого решения: имитация отжига [20, стр. 18], перебор с запретами [20, стр. 19].

В первом случае осуществляются случайные или направленные элементарные преобразования (перемещение, обмен копий данных между серверами), принимаются как улучшающие, так и иногда ухудшающие шаги с вероятность, зависящей от «температуры» системы – параметра управления вероятностью принятия новых решений. Как результат появляются варианты: полностью случайные преобразования и с учётом текущей загрузки серверов.

При втором методе формируется множество соседних состояний путём идентичных первому элементарных преобразований, используется память о запрещённых состояниях (недавно посещённых) для предотвращения зацикливания. В конце выбирается лучшее допустимое соседнее состояние, не входящее в список запретов.

Экспериментальная проверка в статье проведена на имитационной модели мультиклиентского кластера [20, стр. 20]. Оценивалась эффективность по метрике (12) с учетом скорости сходимости и качеству получаемых решений. Оба метаэвристических подхода показали способность находить хорошие (близкие к оптимальным) решения за разумное время даже для крупных кластеров, при этом второй вариант имитации отжига [20, (4) стр. 20] (с учётом загрузки серверов) показал лучшие результаты по качеству балансировки нагрузки.

Статья демонстрирует, что задачи эффективного управления данными в современных облачных системах естественно сводятся к GQAP. Для их решения на практике целесообразно использовать современные стохастические метаэвристики, обеспечивающие высокое качество решений при разумных затратах времени. Использование GQAP-модели позволяет адекватно формализовать задачу управления размещением.

2.3. Задача бурения нефтяных скважин

Статья [21] посвящена разработке алгоритма для решения специальной задачи о назначениях с функцией стоимости общего вида и ограничениями на допустимые паросочетания. В качестве примера приводится задача бурения скважин. В данном контексте это означает необходимость оптимального распределения ресурсов (например, буровых установок, оборудования или рабочих) по объектам (скважинам), с учетом различных затрат и ограничений на допустимость некоторых назначений.

Основные моменты постановки:

- Рассматриваются два множества одинакового размера: множество объектов и множество исполнителей, которые должны быть взаимно однозначно сопоставлены. Каждому исполнителю соответствует ровно одна скважина и наоборот.
- Функция стоимости назначения общего вида учитывает не только прямые затраты на назначение исполнителя на конкретную скважину, но и более сложные зависимости, например, взаимное расположение скважин, взаимодействия между ними и другие факторы, которые могут быть выражены через произвольную функцию стоимости F, зависящую от всей подстановки исполнителей по скважинам.
- Важным аспектом является наличие ограничений на допустимость назначений. Это отражается в матрице допустимых назначений Φ, где элемент равен 1, если назначение возможно, и 0, если запрещено.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ – множество объектов и локаций соответственно. Можно рассматривать этапы бурения и технологические операции как объекты, а конкретные временные интервалы или участки как локации. Тогда нужно найти биективное отображение $\pi: A \to B$, которое сопоставляет локацию каждому объекту.

Целевая функция (стоимости) учитывает не только индивидуальные затраты на назначение объекта a_i на позицию $\pi(i)$, но и взаимодействия между назначениями различных объектов:

$$Z(\pi) = \sum_{i=1}^{n} C_{i\pi(i)} + F(\pi), \quad (17)$$

где $C_{i\pi(i)}$ – индивидуальная стоимость назначения объекта a_i на позицию $\pi(i)$, $F(\pi)$ – произвольная функция, зависящая от всей перестановки π, отражающая взаимодействия между назначениями.

Вводится матрица допустимости $\Phi = (f_{ij})$, где

$$f_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если назначение объекта } a_i \text{ на позицию } b_j \text{ допустимо} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (18)$$

Итак, задача представляется в виде поиска кратчайшего пути в ориентированном графе $G = (V, E)$, вершинами которого являются допустимые назначения (элементы матрицы Ф с $f_{ij} = 1$), а рёбрами – переходы между назначениями с весами, учитывающими функцию стоимости $Z(\pi)$. Вес ребра зависит как от значений, так и от нелокальной функции $F(\pi)$.

Таким образом, (17) сводится к поиску перестановки π, минимизирующей

$$\min_{\pi} \sum_{i=1}^{n} C_{i\pi(i)} + F(\pi) \quad (19)$$

при условии, что π – допустимая биекция по матрице Ф, т. е. удовлетворяющей ограничениям

$$f_{i\pi(i)} = 1, \forall i = 1, \ldots, n \quad (20)$$

Ключевая идея метода решения заключается в сведении QAP к поиску кратчайшего пути в ориентированном графе с неотрицательными весами рёбер. По своей сути представленный в статье алгоритм является модифицированным алгоритмом Дейкстры с расширением логики и учётом ограничений. Вершины графа соответствуют допустимым значениям (18). На каждом шаге выбирается вершина с минимальной стоимостью (19) и для каждой из них проверяется, можно ли из неё достроить допустимый путь до цели. Для учёта функции F требуется хранить информацию о всем пути, а чтобы не включать в путь вершины, из которых нельзя достроить полный допустимый путь, вводится специальная процедура проверки (20).

Алгоритм, рассматриваемый в статье, показал эффективность по времени решения для задач умеренной размерности и возможность решать задачи с произвольной функцией стоимости и запретами на паросочетания. Были представлены тестовые данные на задачах оптимизации бурения скважин [21, стр. 111]. Авторы отмечают, что их задача является обобщением QAP, позволяющим учитывать более сложные зависимости и запреты на некоторые назначения, что делает ее более гибкой для практических приложений. В частности, они формулируют задачу в терминах теории графов и сводят ее к поиску кратчайшего пути в ориентированном графе с нелокальными весами ребер, что является расширением квадратичной задачи о назначениях с дополнительными ограничениями и более общими функциями стоимости. Таким образом, данный алгоритм позволяет решать задачи, выходящие за рамки классических постановок.

3. Заключение

В данной статье рассмотрены современные подходы к моделированию и решению прикладных задач, формализуемых в виде квадратичной задачи о назначениях (QAP) и её обобщений (GQAP). Проанализированы особенности математических постановок, а также методы решения, применяемые в различных областях.

Универсальность моделей QAP и GQAP позволяет эффективно формализовать широкий спектр задач, в которых необходимо учитывать не только индивидуальные затраты, но и взаимодействия между парами назначений. Это особенно важно для сложных систем с взаимозависимыми компонентами.

Сложность решения требует использования специализированных алгоритмов – от точных методов для малых размерностей до эвристик и метаэвристик для практических задач большого масштаба.

Практическая эффективность подходов подтверждается результатами применения в задачах маршрутизации и управления данными в облачных кластерах, где достигнуто значительное улучшение качества решений и балансировки ресурсов.

Перспективы дальнейших исследований связаны с разработкой более масштабируемых и адаптивных алгоритмов, а также с расширением области применения моделей в новых технологических и промышленных задачах.

Литература

1. *Koopmans T. C., Beckmann M.* Assignment problems and the location of economic activities // Econometrica: journal of the Econometric Society. – 1957. – C. 53–76.
2. *Lee C. G., Ma Z.* The generalized quadratic assignment problem // Research Rep., Dept., Mechanical Industrial Eng., Univ. Toronto, Canada. – 2004. – C. M5S.

3. *Bos J.* A quadratic assignment problem solved by simulated annealing // Journal of Environmental Management. 1993. 37 (2). – P. 127–145.
4. *Mans B., Mautor T., Roucairol C.* A parallel depth first search branch and bound algorithm for the quadratic assignment problem // European Journal of Operational Research. 1995. 81. – P. 617–628.
5. *Junger M., Kaibel V.* Box-inequalities for quadratic assignment polytopes // Mathematical Programming. 2001. 91 (1). – P. 175–197.
6. *Frieze A. M., Yadegar J.* An algorithm for solving 3-dimensional assignment problems with application to scheduling a teaching practice //Journal of the operational research society. – 1981. – T. 32. – №. 11. – С. 989–995.
7. *Ramachandran B., Pekny J.F.* Lower bounds for nonlinear assignment problems using many body interactions // European Journal of Operational Research. 1998. 105 (1). – P. 202–215.
8. *Karisch S.E., Cela E., Clausen J., Espersen T.* A dual framework for lower bounds of the quadratic assignment problem based on linearization // Computing 1999. 63. – P. 351–403.
9. *Ramakrishnan K. G. et al.* Tight QAP bounds via linear programming // Combinatorial and Global Optimization. – 2002. – С. 297–303.
10. *Abreu N.M.M., Boaventura-Netto P.O., Querido T.M., Gouveˆa E.F.* Classes of quadratic assignment problem instances: Isomorphism and difficulty measure using a statistical approach // Discrete Applied Mathematics. 2002. 124 (1–3). – P. 103–116.
11. *Marins M.T.A, Abreu N.M.M., Jurkiewicz S.* Automorphism of groups and quadratic assignment problem // Annals of XII Congreso Latino-Iberoamericano de Investigacio´n de Operaciones y Sistemas (CLAIO 2004), La Habana, Cuba. 2004.
12. *Kreher D.L., Stinson D.R.* Combinatorial algorithms: generation, enumeration, and search // ACM SIGACT News. – 1999. – Т. 30. – №. 1. – С. 33–35.
13. *Chakrapani J., Skorin-Kapov J.* Massively parallel tabu search for the quadratic assignment problem // Annals of Operations Research. – 1993. – Т. 41, №. 4. – С. 327–341.
14. *Pardalos P.M. et al. (ed.).* Quadratic Assignment and Related Problems: DIMACS Workshop, May 20-21, 1993. – American Mathematical Soc., 1994. – Т. 16.
15. *Indumathi A., Vinoba V., Padmavathy T.V.* Optimum Path Finding Routing Protocol using Quadratic Assignment in Wireless Sensor Networks // Proceedings of the International Conference on Applied Mathematics and Theoretical Computer Science. – 2013. – P. 239–244. – ISBN 978-93-82338-35-2.
16. *Clayton W. Commander* A Survey of the Quadratic Assignment Problem, with Applications // Morehead Electronic Journal of Applicable Mathematics. Issue 4. – MATH-2005-01.
17. *Loiola E.M. et al.* A survey for the quadratic assignment problem // European journal of operational research. – 2007. – Т. 176, №. 2. – С. 657–690.
18. *Леушкин А.Д., Неймарк Е.А.* Квадратичная задача о назначении. Обзор методов, генерация тестовых задач с априорно известным оптимумом // Труды НГТУ им. РЕ Алексеева. – 2020. – №. 4 (131). – С. 26–34.
19. *Забудский Г.Г., Лагздин А.Ю.* Полиномиальные алгоритмы решения минимаксной квадратичной задачи о назначениях на сетях // Дискретный анализ и исследование операций. – 2011. – Т. 18, № 4. – С. 48–64.
20. *Бойцов Е.А.* Применение стохастических метаэвристик в задаче управления данными в мультиклиентском кластере баз данных // Моделирование и анализ информационных систем. – 2014. – Т. 21, № 4. – С. 13–28.
21. *Ужегов Д.В., Ананьев А.А., Ломовицкий П.В., Хлюпин А.Н.* Новый алгоритм для решения специальной задачи о назначениях с функцией стоимости общего вида при наличии ограничений // Автоматика и телемеханика. – 2019. – № 1. – С. 101–115.