ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТРИКИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Ядыкин И.Б.
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
Jad@ipu.ru

Аннотация. В докладе рассматриваются методы и модели грамианов управляемости сложных линейных стационарных систем, основанных на использовании канонических форм, заданных уравнениями состояния. Предложены структурные и спектральные методы энергетических метрик устойчивости этих моделей в различных канонических формах.

Ключевые слова: ориентированные графы, уравнения Ляпунова и Сильвестра, грамианы, энергетические метрики.

Введение

Первые спектральные разложения грамианов для линейных непрерывных и дискретных систем с простым спектром были получены в работе [1] путем спектрального разложения интегрального представления решения уравнений Ляпунова или Сильвестра. Хорошо известно, что грамианы являются решениями уравнений Сильвестра и Ляпунова, которым посвящено громадное число научных работ, среди которых отметим [2-13]. Эти уравнения играют также фундаментальную роль в теории управления. В последние годы возник интерес к развитию методов вычислений различных энергетических показателей для анализа устойчивости и степени управляемости, достижимости и наблюдаемости этих систем. Такие показатели для линейных устойчивых систем и неустойчивых линейных систем были предложены в ряде работ[14-21]. Упрощенные модели для больших сетей на основе выходных грамианов управляемости, позволяющие вычислять энергетические показатели, были предложены в [16]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств на основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов, рассматривалась в [15, 17, 18, 20]. В монографии [25] сформулирован общий подход к решению задачи оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов для многосвязных систем управления, который основан на декомпозиции системы на устойчивую и неустойчивую подсистемы. Показано, что степень управляемости системы определяется на основе энергетических метрик, основанных на использовании конечных и бесконечных грамианах управляемости. В [18] предложен метод оптимального размещения виртуальной инерции на графе энергетической системы, основанный на использовании энергетических метрик когерентности генераторов и квадрата H_2 – нормы системы, которая задана стандартной динамической моделью в пространстве состояний. Для того, чтобы использовать эту модель для автоматического или оперативного управления необходимы новые инструменты анализа устойчивости, одним из которых является метод грамианов. Метод грамианов позволяет получить не только качественную, но и количественную оценку указанной энергии, сосредоточенной в слабоустойчивых колебаниях. Эффект резонансного взаимодействия близких колебательных мод в динамической системе может усиливаться многократно. Используя метрику управляемости, определяемой долей эффективно управляющих узлов сети в их минимальном наборе, необходимом для полной управляемости, в [10] показано, что разреженные неоднородные сети обладают плохой управляемостью, в то время как плотные однородные сети по сравнению с ними обладают лучшей управляемостью. Преобразование уравнений состояния в канонические формы управляемости и наблюдаемости позволяет выделить среди всех энергетических метрик инвариантные метрики, не зависящие от преобразования координат. Структурные свойства управляемости и наблюдаемости в контексте вычисления и анализа грамианов исследованы в работах [8, 9, 11-13]. Важная задача оптимального размещения датчиков и исполнительных устройств основе различных энергетических функционалов, в том числе инвариантных эллипсоидов рассматривалась в [10, 12, 14-16]. В монографии в [10] сформулирован общий подход к решению задачи оптимального размещения датчиков и исполнительных механизмов для многосвязных систем управления, который основан на декомпозиции системы на устойчивую и неустойчивую подсистемы. Степень управляемости системы определяется на основе энергетических метрик, основанных на использовании конечных и бесконечных грамианов управляемости.Предложен общий метод вычисления обратного грамиана управляемости для уравнений состояния, заданных в канонических формах управляемости.В [14] предложен метод оптимального размещения виртуальной инерции на графе энергетической системы, основанный на использовании энергетических метрик когерентности генераторов и квадрата H_2 – нормы оператора системы, которая задана стандартной динамической моделью в пространстве состояний. Проблема формализована как как задача невыпуклой оптимизации с ограничениями в виде значений грамианов наблюдаемости. Хорошо известно, что задачи управления с минимальной энергией также решаются с использованием грамианов. За последние годы эти подходы были развиты для сложных энергетических, социальных, транспортных и биологических сетей в [15, 16, 21-23, 34, 35]. Степень управляемости (достижимости) сети связана с минимальной энергией, что позволяет ввести в рассмотрение новые метрики в виде минимального собственного числа грамиана управляемости и максимального числа его обратного грамиана, а также следов этих грамианов.

1. Предварительное обсуждение результатов и постановка задачи

Рассмотрим непрерывную стационарную MIMO LTI линейную стационарную непрерывную динамическую систему с многими входами и многими выходами вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = 0, \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t),$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^m$. В случае SISO LTI систем $u(t) \in R^1, y(t) \in R^1$. Уравнения Ляпунова и Сильвестра играют важную роль в теории управления и проектировании систем управления по интегральным показателям качества, синтезе оптимальных систем с использованием наблюдателей состояния [5, 7]. Для решения этих задач применяются уравнения Ляпунова двух типов.

$$AP + PA^T = -I_n \tag{2}$$

$$AP + PA^T = -\sum_{j,\eta} e_j e_\eta^T. \tag{3}$$

Уравнения первого типа возникают в MIMO LTI системах, задаваемых уравнениями состояния общего вида (1). Уравнения второго типа возникают в SISO LTI системах, задаваемых уравнениями состояния в модальной канонической форме и в канонических формах управляемости и наблюдаемости. В модальной канонической форме в этом случае имеем следующие выражения для матрицы A_d, векторов b, c

$$A_d = diag[s_1 \quad \dots . \quad s_n], b = [1 \quad 1 \dots \quad 1]^T, c = [r_1 \quad r_2 \cdots \quad r_n]^T, \tag{4}$$

где r_i – вычет передаточной функции в полюсе «i». Для базовой системы имеем [18]

$$c = [1 \quad 1 \dots \quad 1]^T.$$

В канонических формах управляемости в этом случае уравнения состояния имеют вид

$$\dot{x}_c(t) = A_c^F x_c(t) + b^F u(t), \quad x_c(0) = 0, \tag{5}$$

$$y_c(t) = c^F x_c(t),$$

$$A_c^F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; b^F = [0 \quad 0 \quad .. \quad 0 \quad 1]^T,$$

$$c^F = [\xi_0 \quad \xi_1 \quad .. \quad \xi_{n-2} \quad \xi_{n-1}],$$

где ξ_i – коэффициент полинома числителя передаточной функции

$$W(s) = \frac{\xi_{n-1n-1}s^{n-1} + \dots + \xi_1 s + \xi_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Для базовой системы имеем

$$c^F = [1 \quad 0 \quad .. \quad 0 \quad 0].$$

Классический критерий устойчивости непрерывных линейных систем основан на решении уравнений вида (2), с измененной правой частью вида $-bb^T, -b^F(b^F)^T$. Эти матрицы зависят от матриц преобразования подобия, так что грамианы управляемости и выражения квадратов H_2 -нормы передаточной функции, полученные с помощью грамианов, не являются инвариантами при различных преобразования пространства состояний. Этого недостатка можно избежать, если использовать правые части вида (2) или (3). Назовем эти уравнения второго типа базовыми уравнениями Ляпунова, а соответствующие уравнения состояния, в которых вектор c^F выбран в виде $c^F = [1 \quad 0 \quad .. \quad 0 \quad 0]$ или $c = [1 \quad 1 \ldots \quad 1]^T$ базовыми уравнениями состояния. Этим уравнениям состояния соответствует передаточная функция ПФ

$$W_{base}(s) = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{N(s)}, \tag{6}$$

где $N(s)$ — характеристический многочлен системы. Для уравнений состояния MIMO LTI системы (1) ПФ имеет вид

$$W(s) = \frac{M(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0},$$

$$M(s) = \sum_{\nu=0}^{n-1} C A_\nu^c \, B s^\nu,$$

где A_ν^c — матрицы Фаддеева в разложении резольвенты матрицы A. Назовем матрицей Сяо квадратную матрицу имеющую структуру нулевого пледа вида [9]

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & -y_2 & 0 & y_3 \\ 0 & y_2 & 0 & -y_3 & 0 \\ -y_2 & 0 & y_3 & 0 & \ldots \\ 0 & -y_3 & 0 & \ldots & 0 \\ y_3 & 0 & \ldots & 0 & y_n \end{bmatrix} \quad y_i \in \mathbb{C}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Элементы этой матрицы вычисляются по формулам

$$y_{j\eta} = \begin{cases} 0, & \text{если } j + \eta = 2k + 1, \quad k = 1,2 \ldots n; \\ (-1)^{\frac{j-\eta}{2}} y_n, & \text{если } j + \eta = 2k, \quad k = 1,2 \ldots n. \end{cases}$$

Известно, что базовые уравнения играют важную роль при исследовании устойчивости линейных систем [7]. Рассмотрим дифференциальное уравнение состояния вида

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = \delta(t), \tag{8}$$

$$y^{(n-1)}(0) = 1, y^{(n-2)}(0) = 0, \ldots y(0) = 0,$$

где $\delta(t)$ – δ-функция Дирака. Это уравнение соответствует передаточной функции базовой системы. Доказано, что грамиан управляемости для системы (8) имеет вид матриц Сяо (6), в которой элементы y_i вычисляются с помощью измеряемых величин $y^{(i)}(t)$[9].

$$y_i = \int_0^\infty \left[y^{(i)}(t)\right]^2 dt. \tag{9}$$

Эти оценки имеют физический смысл измеряемых энергий состояний системы, причем они могут быть вычислены различными способами, в том числе с использованием наблюдателей состояния [20]. Покажем, что базовые системы могут быть полностью управляемы при выполнении дополнительных условий. Матрица управляемости для модальной базовой системы (5) является матрицей Вандермонда, которая имеет полный ранг только при условии, что все собственные числа матрицы динамики различны. Матрица управляемости для базовой системы (8), имеет вид

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & -a_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & & & -a_2 \\ 1 & -a_{n-1} & & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

Матрица R не вырождена. Поэтому базовая система (8) полностью управляема. Матрица грамиана управляемости для базовой системы (8) в форме Сяо имеет вид [17]

$$P^{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1,}^{n} (-s_k - s_\lambda)} 1_{j+1\eta+1},$$

$$P^{cF} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\eta=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s_k^j (-s_k)^\eta}{\dot{N}(s_k) N(-s_k)} \mathbf{1}_{j+1\eta+1}.$$

Отсюда следует, что матрицы грамианов P^{cF} положительно определены.

Замечание 1. Полная управляемость базовых систем является одним из условий положительной определенности их грамианов управляемости. Это упрощает определение грамианов управляемости для базовой системы (8), упрощает преобразование грамианов в форму Адамара и вычисление квадрата H_2 -нормы передаточной функции (6). Кроме того, это гарантирует нормальность матрицы грамиана, следствием которой является положительность диагональных элементов и следа соответствующих грамианов. Их элементы зависят только от собственных чисел матрицы динамики и ее характеристического многочлена, которые не зависят от преобразований подобия и, следовательно, являются инвариантами при этих преобразованиях. Что касается базовой системы (5), то грамиан управляемости в ней приобретает простую форму матриц Коши [1, 35].

$$P_c = \frac{-1}{s_j + s_\eta^*}, \quad \forall j, \eta = \overline{1, n}, \quad \forall s_j, s_{\eta,} \in \mathbb{C}^-. \tag{10}$$

Симметричная матрица Коши определяется в виде

$$\mathrm{C} = \frac{-1}{x_j + x_{\eta,}}, \quad \forall j, \eta = \overline{1, n}, \quad \forall x_j, x_{\eta,} \in \mathbb{R}^-. \tag{11}$$

Для таких матриц имеет место следующая

Теорема 1 [35].

Симметричная матрица Коши вида (10) положительно определена тогда и только тогда, когда числа $\mathrm{x_j}, \mathrm{x_\eta}$ положительны и взаимно различны

$$0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, \ \textit{или}\, 0 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1.$$

Следствие 1.

Рассмотрим матрицу Коши вида (10) устойчивой базовой системы (6), или для системы (8). Предположим, что системы устойчивы и собственные числа их матриц динамики действительные и взаимно различные.

Тогда симметричная матрица Коши вида (10) положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$0 < -s_1 < -s_2 < \cdots < -s_n, \ \textit{или}\, 0 < -s_n < -s_{n-1} < \cdots < -s_1.$$

В нашем случае роль положительных чисел $x_j, x_{\eta,}$ играют роль вещественные части собственных чисел матрицы динамики с обратным знаком $-s_j, -s_\eta$, которые могут оказаться комплекснозначными. Это требует представления грамианов в виде устойчивых эрмитовых матриц

$$[P_c]_{Herm} = [P_o]_{Herm}, \ p_{j\eta Herm} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{s_j + s_\eta^*} + \frac{-1}{s_j^* + s_{\eta,}}\right) = Re\left(\frac{-1}{s_j + s_\eta^*}\right).$$

В [1, лемма 9.4] доказано, что матрица Коши (10) устойчивой диагонализированной базовой системы положительно определена. Заметим, что для базовых систем их грамианы управляемости и наблюдаемости совпадают

$$P_c = P_o.$$

Вернемся к уравнению Ляпунова

$$AP + PA^* = -bb^*.$$

Важную роль в исследовании спектральных разложений грамианов, в том числе грамианов базовых систем, играют кратные собственные числа матриц динамики, что связано с рассмотрением уравнений состояния в форме Жордана.

Определение [14-16, 33].

Назовем энергетической метрикой устойчивости системы (1) называется квадрат H_2 -нормы (H_{inf} -нормы) ее передаточной функции.

Цели настоящего исследования для решения задач оценивания состояния и управления состоят в следующем. Первой целью доклада будет получение спектральных разложений матриц грамианов базовых непрерывных динамических систем по кратным спектрам их матриц динамики. Другой целью является разработка рекуррентных алгоритмов вычисления грамиана управляемости и его обратного грамиана управляемости для MIMO LTI непрерывных систем.

2. Основные результаты

При вычислении грамианов базовых систем, уравнения состояния которых задано в Жордановой канонической форме приходится вычислять интегралы Ляпунова вида

$$\int_0^T e^{At} e^{A^* t}\, dt. \tag{12}$$

Ясно, что подъинтегральная функция $H(t)$ в интеграле является первообразной функцией вида $e^{At} e^{A^* t}$

$$H(t) = e^{At} e^{A^* t}.$$

Рассмотрим задачу вычисления спектральных разложений MIMO LTI и SISO LTI систем с помощью решений дифференциальных и алгебраических уравнений Ляпунова в частотной области. Как известно, при выполнении условий, что линейная система устойчива, ее передаточная функция строго собственная, но все полюса различны справедливы следующие формулы для вычисления квадрата H_2 – нормы $W(s)$ [1].

$$\|W(s)\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} r_k\, W(-s_k), r_k = Res[N^{-1}(s), s_k]. \tag{13}$$

В случае базовой системы энергетические метрики устойчивости J_1 , J_2 имеют вид [17].

$$J_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{\dot N(s_k) N(-s_k)}, \tag{14}$$

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{-1}{s_k + s_\rho} \frac{1}{\dot N(s_k) \dot N(s_\rho)}. \tag{15}$$

Формулу (13) можно представить в эквивалентной форме

$$J_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n} (s_k - s_\lambda) \prod_{\lambda=1,}^{n} (-s_k - s_\lambda)},$$

где r_k —вычет передаточной функции в полюсе s_k.

Поскольку матрица устойчивой диагонализированной базовой системы положительно определена, формулу (13) можно представить в виде следа матрицы Коши

$$J_2 = tr \sum_{k=1}^{n} \sum_{\rho=1}^{n} Re\left(\frac{-1}{s_k + s_\rho^*}\right) e_k e_\rho^T.$$

Спектральное разложение передаточной функции ПФ по кратным полюсам базовой SISO LTI системы в общем виде имеет форму

$$W(s) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{L_{k\nu}}{(s - s_k)^{m_k - \nu + 1}},$$

где s_k – полюс передаточной функции, $L_{k\nu}$ – вычет ПФ порядка «ν» в полюсе s_k

$$L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu - 1)!} \left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}} \left(\frac{(s - s_k)^{\nu}}{N(s)} \right) \right]_{s = s_k}.$$

Теорема 2. Спектральные разложения энергетических метрик устойчивости базовых систем по кратным полюсам ПФ.

Рассмотрим базовую SISO LTI систему вида (1) с кратными полюсами с передаточной функцией вида (6). Предположим, что система полностью управляема, строго собственная и устойчивая. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Спектральное разложение энергетической метрики устойчивости базовой системы по кратным полюсам ПФ имеет вид

$$J_1 = J_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{(-1)^{m_k - \nu}}{(m_k - \nu)!} \left\{ L_{k\nu} \left[\frac{d^{m_k - \nu}}{ds^{m_k - \nu}} \left(\frac{1}{N(-s)} \right) \right]_{s = s_k} \right\}_{Herm}, \tag{16}$$

$$L_{k\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!}\left[\frac{d^{\nu-1}}{ds^{\nu-1}}\left(\frac{(s-s_k)^{\nu}}{N(s)}\right)\right]_{s=s_k}.$$

2. Спектральное разложение энергетической метрики базовой системы по комбинационным кратным полюсам ПФ имеет вид

$$J_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_k}\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m_\rho}\frac{(m_k-\nu+m_\rho-\mu+1)!}{(m_k-\nu)!}\left[L_{k\nu}L_{\rho\mu}\frac{1}{(-s_k-s_\rho^*)^{m_k-\nu+m_\rho-\mu+1}}\right]_{Herm}, \qquad (17)$$

где

$$L_{\rho\mu} = \frac{1}{(\mu-1)!}\left[\frac{d^{\mu-1}}{ds^{\mu-1}}\left(\frac{(s-s_\rho)^{\mu}}{N(s)}\right)\right]_{s=s_\rho}.$$

Энергетические метрики базовой системы (6) или для системы (8) J_1, J_2 являются положительными числами. Они являются инвариантами при различных преобразованиях подобия.

Следствие 2.

Пусть выполнены условия теоремы 2, но все полюса ПФ различны. Тогда справедливо следующее утверждение.

$$J_1(s_1, \dots s_n) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\dot N(s_k)}\frac{1}{(-s_k)^n+\dots+a_1(-s_k)+a_0} > 0, \qquad (18)$$

$$J_2(s_1, \dots s_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{n}J_{2,k\rho}(s_1, \dots s_n) > 0, \qquad (19)$$

$$J_{2,k\rho}(s_1, \dots s_n) = 2Re\,\frac{r_k r_\rho}{(-s_k-s_\rho)} = \frac{2\alpha_{k\rho}Re(r_k r_\rho)}{\alpha_{k\rho}^2+\beta_{k\rho}^2}, \qquad (20)$$

$$\alpha_{k\rho} = -Re\,s_k - Re\,s_\rho, \beta_{k\rho} = -Im\,s_k - Im\,s_\rho.$$

Рассмотрим далее дифференциальное и алгебраическое уравнения Ляпунова вида

$$\frac{dP(t)}{dt} = A_d P(t) + P(t)A_d^T + b_d b_d^T,\ P(0) = 0_{nxn}, \quad t \in [0, T], \qquad (21)$$

$$P + PA_d^T = -b_d b_d^T. \qquad (22)$$

Теорема 3. Предположим, что система SISO LTI (2.1) является полностью управляемой, существует невырожденное преобразование координат $x_d = Tx$, такое, что

$$A_d = TAT^{-1}.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы A различны, не принадлежат мнимой оси и выполнены условия

$$s_i + s_j \neq 0, \qquad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Решение уравнения (21) в комплексной области существует, единственно и имеет вид

$$\mathcal{L}[P(t)] = \frac{1}{s}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{-1}{\left(s_i+s_j^*\right)}\left[Res(Is-A_d)^{-1}, s_i\right] b_{di} b_{dj}\left[Res(Is-A_d^*)^{-1}, s_j^*\right]\right\}_{Herm},$$

где b_{di} – элемент «*i*» вектора b_d, b_{dj} – элемент «*j*» вектора b_d.

2) Решение уравнения (21) в действительной области единственно и имеет вид

$$P(0, T) = \int_0^T\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{-1}{\left(s_i+s_j^*\right)} b_d b_d^T e^{(s_i+s_j^*)\tau} e_j e_\eta^T\, d\tau\right\}_{Herm}.$$

3) Решение алгебраического уравнения (22) в действительной области существует, единственно и имеет вид

$$P(0, \infty) = \left\{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{-b_{di}b_{dj}}{\left(s_i+s_j^*\right)} e_j e_\eta^T\right\}_{Herm}.$$

Матрица $P^{-1}(0, \infty)$ в условиях теоремы существует и единственна.

$$P^{-1}(0, \infty) = -\frac{P_0}{p_0},$$

в которой P_0 —свободный член матричного полинома Фаддеева, p_0 – свободный член характеристического полинома матрицы $P(0,T)$, определяемые с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева-Леверье [29, 30].

Теорема 4. Рассмотрим MIMO LTI систему (1) в канонической форме управляемости и запишем дифференциальное уравнение Ляпунова

$$\frac{dP(t)}{dt} = A_c^F P(t) + P(t)(A_c^F)^T + B^F(B^F)^T,\ P(0) = 0_{nxn},\quad t \in [0,T]. \tag{23}$$

Предположим, что система (23) является полностью управляемой, существует невырожденное преобразование координат $x_c = Tx$, такое, что

$$A_c^F = TAT^{-1}.$$

Предположим, что все собственные числа матрицы A_c^F различны, не принадлежат мнимой оси и выполнены условия $s_i + s_j \neq 0,\ \forall i,j = \overline{1,n}$.

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) Решение уравнения (23) в комплексной области существует, единственно и имеет вид

$$[P(s)] = \frac{1}{s}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[Res(Is - A_c^F)^{-1}, s_j\right] B^F(B^F)^T\{[[-Is - (A_c^F)^T]^{-1}]\}\right\}_{,Herm}$$

где

$$A_{cj}^F = a_{j+1}I + a_{j+2}A_c^F + \cdots + a_n(A_c^F)^{n-j-1},\ j = \overline{0,n-1},$$

$$A_{c\eta}^F = a_{\eta+1}I + a_{\eta+2}A_c^F + \cdots + a_n(A_c^F)^{n-\eta-1},\quad \eta = \overline{0,n-1}.$$

2) Решение уравнения (23) в действительной области единственно и имеет вид

$$P_{j\eta}(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod_{\lambda=1}^{n}(-s_\rho - s_\lambda)}(e^{s_k t} - 1)A_{cj}^F B^F(B^F)^T\left(A_{c\eta}^F\right)^T$$

$$= \Omega_{c,j\eta}^F(t) \circ \Psi_{c,j\eta}^F,$$

$$\Omega_{c,j\eta}^F(t) = \sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod_{\lambda=1}^{n}(-s_\rho - s_\lambda)}(e^{s_k t} - 1)e_j e_\eta^T, \Psi_{c,j\eta}^F = A_{cj}^F B^F(B^F)^T(A_{c\eta}^F)^T.$$

3) Бесконечный грамиан управляемости системы (1) имеет вид

$$P(0,\infty) = \left\{\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{\eta=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k^j(-s_k)^\eta}{\prod_{\lambda=1,\lambda\neq k}^{n}(s_k - s_\lambda)\prod_{\lambda=1}^{n}(-s_\rho - s_\lambda)}e_j e_\eta^T\right\}_{Herm} \times$$

$$A_{cj}^F B^F(B^F)^T(A_{c\eta}^F)^T.$$

4) Матрица $P^{-1}(0,\infty)$ в условиях теоремы существует и единственна.

$$P^{-1}(0,\infty) = -\frac{P_0^F}{p_0},$$

в которой P_0^F —свободный член матричного полинома Фаддеева для уравнений состояния в канонической форме управляемости, p_0 — свободный член характеристического полинома грамиана, определяемые с помощью рекуррентного алгоритма Фаддеева-Леверье [29, 30].

5) Результаты теоремы могут быть распространены на случай канонических форм Жордана уравнений состояния (1) для случая, когда характеристическое уравнение матрицы динамики имеет «*к*» различных корней кратности m_k. Решение уравнения (23) в действительной области для кратных собственных чисел s_k матрицы A_c^F с кратностью m_k имеет вид

$$P(\,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_{j\eta}(t),$$

$$P_{j\eta}(t) = h_{j\eta}(t)A_{cj}^F B^F(B^F)^T(A_{c\eta}^F)^T,$$

$$h_{j\eta}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{s^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_k}L_{k,j}\frac{(-1)^{m_k-\nu}}{(m_k-\nu)!}\left[\frac{d^{m_k-\nu}}{ds^{m_k-\nu}}\left(\frac{s^\eta}{N(-s)}\right)\right]_{s=s-s_k}\right\},$$

$$L_{k,j} = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left(\frac{(s-s_k)^{m_k}s^j}{N(s)}\right)\right]_{s=k}.$$

3. Заключение

Метод спектральных и сингулярных разложений грамианов является развитием частотных методов анализа и синтеза систем управления. Основным инструментом для построения разложений являются теоремы преобразование Лапласа для спектральных и сингулярных разложений решений дифференциальных уравнений Ляпунова и Сильвестра, разложение резольвенты матрицы динамики и матрицы грамиана в ряд Фаддеева - Леверье и рекуррентные алгоритмы вычисления матриц Фаддеева. Эти разложения для канонических форм управляемости и наблюдаемости имеют явную физическую интерпретацию в виде мер энергии квадратичных форм, образованных переменными состояния базовой системы.

В работе показано, что прямой и обратные грамианы управляемости можно вычислять с помощью одной общей эффективной рекуррентной процедуры. В статье предложен новый способ вычисления изображений по Лапласу конечных грамианов для простых и кратных собственных чисел на основе рекуррентных алгоритмов, основанных на разложении изображения матричной резольвенты в ряд Фаддеева – Леверье. Применение преобразований уравнений системы в канонические формы дает при вычислении спектральных разложений прямых и обратных грамианов следующие преимущества:

1) Матрицы грамианов вычисляют как решения дифференциальных уравнений Ляпунова в частотной и временной области, что позволяет одновременно вычислять решения алгебраических уравнений Ляпунова, как конечные, так и бесконечные грамианы, как прямые, так и обратные грамианы для непрерывных динамических систем, задаваемыми уравнениями состояния в канонических формах: Жордана, модальной, управляемости ,наблюдаемости.

2) Грамианы в канонических формах управляемости и наблюдаемости в форме матриц Сяо являются инвариантными при преобразовании подобия. При этом для их вычисления достаточно вычислить только n диагональных элементов матриц грамианов вместо n^2 элементов.

3) Энергетические метрики устойчивости базовых систем J_1 и J_2 позволяют вычислять степень устойчивости системы не только для различных, но и для кратных корней характеристического уравнения. Наличие кратных корней существенно усиливает угрозу потери устойчивости.

4) Спектральные разложения грамианов управляемости устойчивой базовой системы в форме Коши зависят от вещественных частей простых и кратных собственных чисел матрицы динамики, от их плотности распределения на вещественной оси [25].

Недостатком новых методов и алгоритмов, развиваемых в данной работе, являются проблемы их вычислительной реализации для систем высокой размерности, обусловленные ростом ошибок округления для этих систем [1, 8, 9]. В статье получены результаты исследований, которые могут оказаться полезными в проектировании цифровых двойников, методов оптимизации затрат энергии в системах управления, анализа энергетических метрик устойчивости и достижимости, мониторинга состояния на основе анализа аномалий энергетического баланса, разработке энергетических метрик систем, задаваемых уравнениями состояния для динамических сетей в виде графов.

Литература

1. *Antoulas A.C.* Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM Press: Philadephia, PA, USA, 2005.
2. *Benner P., Damm T.* Lyapunov equations, Energy Functionals and Model Order Reduction of Bilinear and Stochastic Systems // SIAM J. Control Optim., 2011. – № 49. – P. 686–711.
3. *Behr M., Benner P. and Heiland J.* Solution formulas for differential Sylvester and Lyapunov equations // 56, 51// 2019.
4. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. – М.: ЛЕНАНД, 2019. – 491 с.
5. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. – М: Наука, 1976. – 424 с.
6. *Зубов Н.Е., Зыбин Е.Ю., Микрин Е.А., Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н.* Общие аналитические формы решения уравнений Сильвестра и Ляпунова для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2017. – № 1. – С. 3—20.
7. *Dorf R.C., Bishop R.H.* Modern control systems. Printice Hall.Nine Edition.2001.*Дорф, Р.К., Бишоп, Р.Х.* Современные системы управления. Пер с англ. Б.И.Копылова.Лаборатория базовых знаний, 2012. – 832 с.
8. *Hauksdottir S.P., Sigurdsson S.O., Adalgeirsson H., Porgilsson and Herjolfsson G.* Closed form solutions of the Sylvester and the Lyapunov equations – closed form Gramians // *2008 American Control Conference,* Seattle, WA, USA, 2008. – P. 2585–2590.
9. *Hauksdottir A.S., Sigurdsson S.P.* The continuous closed form controllability Gramian and its inverse. // Proceedings of the 2009 American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 10–12 June 2009. – P. 5345–5350.
10. *Liu Y.Y., Slotine J.J., Barabasi A.L.* Controllability of complex networks // Nature 473 (7346):167–73 2021.

11. *Xiao C.S. Feng Z.M. Shan X.M.* On the Solution of the Continuous–Time Lyapunov Matrix Equation in Two Canonical Forms // IEE Proceedings–D, 1992. – Vol. 139. –. № 3. – P. 286–290.
12. *Mehr F.A.* Determination of Design of Optimal Actuator Location Based on Control Energy, 2018.
13. *Sreeram V., Agathoklis P.* Solution of Lyapunov equation with system matrix in companion form. // IEE Proc. D Control. Theory Appl. – 1991. – № 138. – P. 529–534.
14. *Pasqualetti F., Zampieri S., Bullo F.* Controllability metrics, limitations and algorithms for complex networks, 2014 American Control Conference, 2014. – P. 3287–3292.
15. *Lindmark, G., Altafini, C.* Minimum energy control for complex networks // Scientific Reports, 2018. – 8:3188. – P. 1–14.
16. *Summers T.H., Cortesi F.L., Lygeros J.* On submodularity and controllability in complex dynamical networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems, 2016.–№ 3 (1). – P. 91–101.
17. *Ядыкин И.Б.* Спектральные разложения обратных матриц грамианов и энергетических метрик непрерывных динамических систем // Автоматика и телемеханика, 2024. – Вып. 10. – С. 80–107.
18. *Ядыкин И.Б., Галяев А.А.* О методах вычисления грамианов и использовании их в анализе линейных динамических систем // Автоматика и телемеханика, 2013. – № 2. – С. 53–74.
19. *Бирюков Д.С., Ушаков А.В.* Грамианный подход к оценке энергетических затрат на управление в непрерывных системах при стационарных стохастических воздействиях // Известия вузов. Приборостроение, 2011. – Том 54. – № 6 – С. 36–44.
20. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. – Москва. Физматлит, 2007. – 223 с.
21. *Bianchin G., Pasqualetti P.* Gramian-based optimization for the analysis and control of traffic networks // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2020 – Vol. 21, № 7. – P. 3013–3024.
22. *Zhao S., Pasqualetti F.* Networks with diagonal controllability Gramian: Analysis, graphical conditions, and design algorithms // Automatica, Apr. 2019. – Vol. 102. – P. 10–18.
23. *Ghosh S., Isbeih Y.J., El Moursi M.S., El-Saadany E.F.* Cross-gramian model reduction approach for tuning power system stabilizers in large power networks. // IEEE Transactions on Power Systems, 2019. – № 35(3). – P. 1911–1922.
24. *Краснова С.А., Уткин В.А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Издательство "Наука", 2006. – 272 с.
25. *Фуртат И.Б.* Плотностные системы. Анализ и управление // Автоматика и телемеханика., 2023. – № 11. – Р. 55–76.
26. *Мироновский Л.А., Соловьева Т. Н.* Анализ и синтез модально-сбалансированных систем // Автоматика и телемеханика, 2012. – С. 59–79.
27. *Bakhtadze N., Yadykin I.* Discrete Predictive Models for Stability Analysis of Power Supply Systems // Mathematics, 8(11), 1943. 2020.
28. *Гарднер М.Ф., Бэрнс Дж.Л.* Переходные процессы в линейных системах. – М: Физматлит, 1961.
29. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Учебник – М: Изд. Лань, 2009. – 726 с.
30. *Hanson B., Peeters R.L.M.* A Faddeev Sequence Method for solving Lyapunov and Sylvester Equations // Linear Algebra and its Applications, 1996. – № 241–243. –P. 401–430.
31. *Искаков А.Б., Кутяков Е.Ю., Катаев Д.Е.* Locating the source of forced oscillations on the basis of Lyapunov modal analysis // IFAC–PapersOnLine. Rabat: Elsevier, 2024. – Vol. 58, Issue 13. – P. 685–690.
32. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А.* Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // Автоматика и телемеханика, 2023. – Вып. 10. – С. 132–149.
33. *Ядыкин И.Б., Галяев И.А.* Структурные спектральные методы решения непрерывных уравнений Ляпунова // Автоматика и телемеханика, 2023. – Вып. 12. – С. 18–37.
34. *Fiedler M.* Notes on Hilbert and Cauchy matrices. // Linear algebra and its Applications, 2010. – Vol. 432. – P. 351–356.
35. *Параев Ю.И.* Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск: Изд. Томского университета, 1989. – 166 с.
36. *Ядыкин И.Б.* Энергетические метрики больших динамических сетей // Труды 17-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2024). М.: Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова, 2024. – Т. 1. – С. 41–52.